

ASTRONAUTICA ACTA

OFFIZIELLES ORGAN DER
INTERNATIONALEN
ASTRONAUTISCHEN
FÖDERATION

OFFICIAL JOURNAL OF THE
INTERNATIONAL
ASTRONAUTICAL
FEDERATION

ORGANE OFFICIEL DE LA
FÉDÉRATION
INTERNATIONALE
D'ASTRONAUTIQUE

HERAUSGEGEBEN VON / EDITORIAL BOARD / COMITÉ DES RÉDACTEURS

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. • A. EULA-Roma • J. M. J. KOOY-Breda
F. I. ORDWAY III-Huntsville/Ala. • E. SÄNGER-Stuttgart • K. SCHÜTTE-München
L. R. SHEPHERD-Chilton • J. STEMMER-Baden/Schweiz

SCHRIFTFÜHRUNG / EDITOR-IN-CHIEF / RÉDACTEUR EN CHEF

F. HECHT-Wien

Vol.
3
1957

VOL. III

MIT 82 ABBILDUNGEN / WITH 82 FIGURES / AVEC 82 FIGURES



SPRINGER-VERLAG • WIEN

I. R. MAXWELL & CO. LTD. • LONDON/PARIS/NEW YORK

1957

Vg
3
19

ASTRONAUTICA ACTA

OFFIZIELLES ORGAN DER
INTERNATIONALEN
ASTRONAUTISCHEN
FÖDERATION

OFFICIAL JOURNAL OF THE
INTERNATIONAL
ASTRONAUTICAL
FEDERATION

ORGANE OFFICIEL DE LA
FÉDÉRATION
INTERNATIONALE
D'ASTRONAUTIQUE

HERAUSGEGEBEN VON / EDITORIAL BOARD / COMITÉ DES REDACTEURS

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. • A. EULA-Roma • J. M. J. KOOY-Breda
F. I. ORDWAY III-Huntsville/Ala. • E. SÄNGER-Stuttgart • K. SCHÜTTE-München
L. R. SHEPHERD-Chilton • J. STEMMER-Baden/Schweiz

SCHRIFTFLEITUNG / EDITOR-IN-CHIEF / RÉDACTEUR EN CHEF
F. HECHT-Wien

VOL. III / FASC. 1

MIT 20 ABBILDUNGEN / WITH 20 FIGURES / AVEC 20 FIGURES

Inhalt — Contents — Sommaire

Canney, H. E., Jr., and F. I. Ordway, III: The Uses of Artificial Satellite Vehicles. Part II	1
Klemperer, W. B., and R. M. Baker, Jr.: Satellite Librations (With 4 Figures)	16
Kaeppler, H. J., und G. Baumann: Über Systeme mit chemisch reagierenden Komponenten im Gleichgewicht. I. Die Berechnung der Gemischzusammensetzung	28
Hecht, F., und R. Patzak: Chemische Analyse von in Tiefseesedimenten gefundenen mikroskopischen Kügelchen vermutlich kosmischen Ursprunges	47
Cremona, C. E.: Metodo fotografico per la determinazione della resistenza aerodinamica di missili in volo (Con 4 figure)	52
Ordway, F. I., III: Project Vanguard — Earth Satellite Vehicle Program. Characteristics, Testing, Guidance, Control, and Tracking (With 12 Figures)	67
Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus	87



SPRINGER-VERLAG • WIEN

I. R. MAXWELL & CO. LTD. • LONDON/PARIS/NEW YORK

1957

Astronaut. Acta

Vol.
3
1957

ASTRONAUTICA ACTA

Fachbeirat / Advisory Board / Comité de conseil

J. Ackeret-Zürich · **A. D. Baxter**-Cranfield · **E. R. Bergaust**-Arlington/Va.
H. E. Canney, Jr.-New York · **G. P. Casiraghi**-Genova · **A. V. Cleaver**-London
G. A. Crocco-Roma · **F. C. Durant, III**-Lexington/Mass.
K. A. Ehrlicke-San Diego/Calif. · **R. Engel**-Héliopolis · **J. Eugster**-Bern
H. Gartmann-Bad Soden · **W. Georgii**-München · **F. Gerlach**-Bad Godesberg
A. G. Haley-Washington/D.C. · **H. Hohn**-Wien · **H. J. Kaeppler**-Stuttgart
Th. v. Kármán-Paris · **H. G. L. Krause**-Stuttgart-Bad Cannstatt
K. Krejci-Graf-Frankfurt/Main · **D. F. Lawden**-Christchurch · **F. I. Mallina**-Paris
D. F. Martyn-Sydney · **H. Nowotny**-Wien · **H. Oberth**-Huntsville/Ala.
E. Roebger-Berlin-Charlottenburg · **I. Sänger-Bredt**-Stuttgart · **W. Schaub**-Ferndorf
S. F. Singer-Greenbelt/Md. · **H. Strughold**-Randolph Air Force Base/Tex.
T. Tabanera-Buenos Aires · **B. Thürling**-Karlsruhe · **H. S. Tsien**-Pasadena/Calif.
E. Vassy-Paris · **H. J. White**-Bluefield/W.Va.

Die *Astronautica Acta* erscheinen vierteljährlich. Jahresbezugspreis S 216.—, DM 36.—, \$ 8.00, sfr. 37.20.

Manuskripte können gesandt werden an: Prof. Dr. WERNHER VON BRAUN, 907 Mac Clung Street, Huntsville/Ala., USA, oder an Prof. Dott. Ing. ANTONIO EULA, Via Emilio del Cavaliere 12, Roma, Italia, oder an Prof. Dr. FRIEDRICH HECHT, Wien VIII., Alserstraße 69, Österreich, oder an Ir. Dr. J. M. J. KOOP, Lector K.M.A., St. Ignatiusstraat 99 a, Breda, Holland, oder an FREDERICK I. ORDWAY, III, Route 4, Box 115, Huntsville/Ala., USA, oder an Dr. EUGEN SÄNGER, Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, (14) Stuttgart-Flughafen, Deutschland, oder an Univ.-Prof. Dr. KARL SCHÜTTE, (13 b) München 27, Ortnitstraße 15 (Schließfach 81), Deutschland, oder an Dr. LESLIE R. SHEPHERD, 28 Avon Road, Chilton/Berks., England, oder an Ing. JOSEF STEMMER, Baden/Schweiz. Postfach 37. Alle geschäftlichen Mitteilungen sind zu richten an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, Österreich.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

Eingelangte Arbeiten — Papers Received — Articles reçus

- Bednarczyk, H.:** Beitrag zur Theorie der Wasserdampfkrakete.
- Goldman, D. T., and S. F. Singer:** Studies of a Minimum Orbital Unmanned Satellite of the Earth (MOUSE). Part III. Radiation Equilibrium and Temperature.
- Kooy, J. M. J.:** On the Application of the Method of Variation of Elliptic Orbit Elements in Case of a Satellite Vehicle.
- Leitmann, G.:** A Note on GODDARD's Problem.
- Michielsen, H. F.:** The Case for the Low Acceleration Spaceship.
- Peschka, W.:** Über eine Möglichkeit zur Erhöhung der Ausströmgeschwindigkeit bei Raketentriebwerken.
- Rosenstock, H. B.:** The Effect of the Earth's Magnetic Field on the Spin of the Satellite.
- Sänger, E.:** Zur Flugmechanik der Photonenraketen.
- Sänger-Bredt, Irene:** Die Eigenschaften von Wasserstoff und Wasser als Arbeitsgase für kernenergetisch beheizte Raketentriebwerke.

ASTRONAUTICA ACTA

OFFIZIELLES ORGAN DER
INTERNATIONALEN
ASTRONAUTISCHEN
FÖDERATION

OFFICIAL JOURNAL OF THE
INTERNATIONAL
ASTRONAUTICAL
FEDERATION

ORGANE OFFICIEL DE LA
FÉDÉRATION
INTERNATIONALE
D'ASTRONAUTIQUE

HERAUSGEGEBEN VON / EDITORIAL BOARD / COMITÉ DES RÉDACTEURS

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. • A. EULA-Roma • J. M. J. KOOY-Breda
F. I. ORDWAY III-Huntsville/Ala. • E. SÄNGER-Stuttgart • K. SCHÜTTE-München
L. R. SHEPHERD-Chilton • J. STEMMER-Baden/Schweiz

SCHRIFTFÜHRUNG / EDITOR-IN-CHIEF / RÉDACTEUR EN CHEF

F. HECHT-Wien

VOL. III / FASC. 2

MIT 33 ABBILDUNGEN / WITH 33 FIGURES / AVEC 33 FIGURES

Inhalt — Contents — Sommaire

Sänger, E.: Zur Flugmechanik der Photonenraketen (Mit 2 Abbildungen)	89
Peschka, W.: Über eine Möglichkeit zur Erhöhung der Ausströmgeschwindigkeit bei Raketentriebwerken (Mit 9 Abbildungen)	100
Goldman, D. T., and S. F. Singer: Studies of a Minimum Orbital Unmanned Satellite of the Earth (MOUSE). Part III. Radiation Equilibrium and Temperature (With 14 Figures)	110
Miehlisen, H. F.: The Case for the Low Acceleration Spaceship	130
Bednarczyk, H.: Beitrag zur Theorie der Wasserdampf Rakete (Mit 8 Abbildungen)	153
Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus	177



SPRINGER-VERLAG • WIEN

I. R. MAXWELL & CO. LTD. • LONDON/PARIS/NEW YORK

1957

ASTRONAUTICA ACTA

Fachbeirat / Advisory Board / Comité de conseil

- J. Ackeret-Zürich · A. D. Baxter-Cranfield · E. R. Bergaust-Arlington/Va.
 H. E. Canney, Jr.-New York · G. P. Casraghi-Genova · A. V. Cleaver-London
 G. A. Crocco-Roma · F. C. Durant, III-Lexington/Mass.
 K. A. Ehricke-San Diego/Calif. · R. Engel-Héliopolis · J. Eugster-Bern
 H. Gartmann-Bad Soden · W. Georgii-München · F. Gerlach-Bad Godesberg
 A. G. Haley-Washington/D.C. · H. Hohn-Wien · H. J. Kaeppler-Stuttgart
 Th. v. Kármán-Paris · H. G. L. Krause-Stuttgart-Bad Cannstatt
 K. Krejci-Graf-Frankfurt/Main · D. F. Lawden-Christchurch · F. I. Mallina-Paris
 D. F. Martyn-Sydney · H. Nowotny-Wien · H. Oberth-Huntsville/Ala.
 E. Roßberger-Berlin-Charlottenburg · I. Sänger-Bredt-Stuttgart · W. Schaub-Ferndorf
 S. F. Singer-Greenbelt/Md. · H. Strughold-Randolph Air Force Base/Tex.
 T. Tabanera-Buenos Aires · B. Thürling-Karlsruhe · H. S. Tsien-Pasadena/Calif.
 E. Vassy-Paris · H. J. White-Bluefield/W.Va.

Die *Astronautica Acta* erscheinen vierteljährlich. Jahresbezugspreis S 216.—, DM 36.—, \$ 8.60, sfr. 37.20.

Manuskripte können gesandt werden an: Prof. Dr. WERNER VON BRAUN, 907 Mac Clung Street, Huntsville/Ala., USA, oder an Prof. Dott. Ing. ANTONIO EULA, Via Emilio del Cavaliere 12, Roma, Italia, oder an Prof. Dr. FRIEDRICH HECHT, Wien VIII, Alserstraße 69, Österreich, oder an Ir. Dr. J. M. J. KOOP, Lector K.M.A., St. Ignatiusstraat 99 a, Breda, Holland, oder an FREDERICK I. ORDWAY, III, Route 4, Box 115, Huntsville/Ala., USA, oder an Dr. EUGEN SÄNGER, Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, (14) Stuttgart-Flughafen, Deutschland, oder an Univ.-Prof. Dr. KARL SCHÜTTE, (13 b) München 27, Ortnitstraße 15 (Schließfach 81), Deutschland, oder an Dr. LESLIE R. SHEPHERD, 28 Avon Road, Chilton/Berks., England, oder an Ing. JOSEF STEMMER, Baden/Schweiz. Postfach 37. Alle geschäftlichen Mitteilungen sind zu richten an den Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastei 5, Österreich.

Arbeiten können in einer der offiziellen Kongresssprachen veröffentlicht werden. Jeder Arbeit ist eine Zusammenfassung beizufügen. Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können weitere Separata zu angemessenem Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Das Manuskript ist möglichst in Maschinschrift einzusenden. Die Ausdrucksweise soll so knapp als möglich sein. Die Abbildungen, deren Anzahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Farbige Abbildungen können nur auf Kosten des Autors angefertigt werden. Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Eingelangte Arbeiten — Papers Received — Articles reçus

- Davis, R. J., R. C. Wells, and F. L. Whipple: On Determining the Orientation of a Cylindrical Artificial Earth-Satellite.
 Kooy, J. M. J.: On the Application of the Method of Variation of Elliptic Orbit Elements in Case of a Satellite Vehicle.
 Lettmann, G.: A Note on GODDARD's Problem.
 Rosenstock, H. B.: The Effect of the Earth's Magnetic Field on the Spin of the Satellite.
 Sänger-Bredt, Irene: Die Eigenschaften von Wasserstoff und Wasser als Arbeitsgase für kernenergetisch beheizte Raketentriebwerke.

Vol
3
195

ASTRONAUTICA ACTA

OFFIZIELLES ORGAN DER
INTERNATIONALEN
ASTRONAUTISCHEN
FÖDERATION

OFFICIAL JOURNAL OF THE
INTERNATIONAL
ASTRONAUTICAL
FEDERATION

ORGANE OFFICIEL DE LA
FÉDÉRATION
INTERNATIONALE
D'ASTRONAUTIQUE

HERAUSGEGEBEN VON / EDITORIAL BOARD / COMITÉ DES RÉDACTEURS

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. • A. EULA-Roma • J. M. J. KOOY-Breda
F. I. ORDWAY III-Huntsville/Ala. • E. SÄNGER-Stuttgart • K. SCHÜTTE-München
L. R. SHEPHERD-Chilton • J. STEMMER-Baden/Schweiz

SCHRIFTFÜHRUNG / EDITOR-IN-CHIEF / REDACTEUR EN CHEF

F. HECHT-Wien

VOL. III / FASC. 3

MIT 11 ABBILDUNGEN / WITH 11 FIGURES / AVEC 11 FIGURES

Inhalt — Contents — Sommaire

Kooy, J. M. J.: On the Application of the Method of Variation of Elliptic Orbit Elements in Case of a Satellite Vehicle (With 11 Figures)	179
Rosenstock, H. B.: The Effect of the Earth's Magnetic Field on the Spin of the Satellite	215
Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus	222



SPRINGER-VERLAG • WIEN

I. R. MAXWELL & CO. LTD • LONDON/PARIS/NEW YORK

1957

Astronaut. Acta

Vol.
3
1957

ASTRONAUTICA ACTA

Fachbeirat / Advisory Board / Comité de conseil

J. Ackeret-Zürich · **A. D. Baxter**-Cranfield · **E. R. Bergaust**-Arlington/Va.
H. E. Canney, Jr.-New York · **G. P. Casiraghi**-Genova · **A. V. Cleaver**-London
G. A. Crocco-Roma · **F. C. Durant, III**-Lexington/Mass.
K. A. Ehricke-San Diego/Calif. · **R. Engel**-Héliopolis · **J. Eugster**-Bern
H. Gartmann-Bad Soden · **W. Georgli**-München · **F. Gerlach**-Bad Godesberg
A. G. Haley-Washington/D.C. · **H. Hohn**-Wien · **H. J. Kaeppler**-Stuttgart
Th. v. Kármán-Paris · **H. G. L. Krause**-Stuttgart-Bad Cannstatt
K. Krejci-Graf-Frankfurt/Main · **D. F. Lawden**-Christchurch · **F. I. Malina**-Paris
D. F. Martyn-Sydney · **H. Nowotny**-Wien · **H. Oberth**-Huntsville/Ala.
E. Roeliger-Berlin-Charlottenburg · **I. Sänger-Bredt**-Stuttgart · **W. Schaub**-Ferndorf
S. F. Singer-Greenbelt/Md. · **H. Strughold**-Randolph Air Force Base/Tex.
T. Tabanera-Buenos Aires · **B. Thürling**-Karlsruhe · **H. S. Tsien**-Pasadena/Calif.
E. Vassy-Paris · **H. J. White**-Bluefield/W.Va.

The *Astronautica Acta* are published quarterly. Subscription \$ 8.60, sfr. 37.20, DM 36.—, S 216.— per year.

Manuscripts may be addressed to: Prof. Dr. WERNHER VON BRAUN, 907 Mac Clung Street, Huntsville/Ala., USA, or to Prof. Dott. Ing. ANTONIO EULA, Via Emilio del Cavaliere 12, Roma, Italy. or to Prof. Dr. FRIEDRICH HECHT, Wien VIII., Alserstraße 69, Austria, or to Ir. Dr. J. M. J. KOOV, Lector K.M.A., St. Ignatiusstraat 99 a, Breda, Holland, or to FREDERICK I. ORDWAY, III, Route 4, Box 115, Huntsville/Ala., USA, or to Dr. EUGEN SÄNGER, Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, (14) Stuttgart-Flughafen, Germany, or to Univ.-Prof. Dr. KARL SCHÜTTE, (13 b) München 27, Ortnitstraße 15 (Schließfach 81), Germany, or to Dr. LESLIE R. SHEPHERD, 28 Avon Road, Chilton/Berks., England, or to Ing. JOSEF STEMMER, P.O.Box 37, Baden/Switzerland, all business communications to Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, Austria.

Papers are published in one of the official congress languages. Each paper must be accompanied by a summary. Papers are accepted on the clear understanding that the subject matter has not been and will not be published in another journal. With acceptance and publication of the manuscript the exclusive copyright for every language and country passes over to the Publishers. Photographic reproductions, microfilms, etc. of single issues, papers, or parts thereof are not permitted unless special consent has been obtained from the Publishers. Authors receive 75 reprints of their papers free of charge and may order further reprints at a convenient price, but notice must be given by the order-form attached to the galley proofs when returning them to the Publishers.

Manuscripts should be typewritten. Utmost brevity of expression is desired. Illustrations should be reduced to the indispensable number and sent in separately, each one on a separate sheet. Coloured illustrations can be published only if paid by the Author. Costs caused by changes or revisions made by the Author in galley proofs exceeding 10 per cent of composition costs will be charged to the Author.

Eingelangte Arbeiten — Papers Received — Articles reçus

Davis, R. J., R. C. Wells, and F. L. Whipple: On Determining the Orientation of a Cylindrical Artificial Earth-Satellite.

Fraeijls de Veubeke, B.: Le problème du maximum de rayon d'action dans un champ de gravitation uniforme.

Leitmann, G.: A Note on GODDARD's Problem.

Ordway, F. I., III: Instrumentation of Artificial Satellites.

Sänger-Bredt, Irene: Die Eigenschaften von Wasserstoff und Wasser als Arbeitsgase für kernenergetisch beheizte Raketentriebwerke.

Vol
3
195

ASTRONAUTICA ACTA

OFFIZIELLES ORGAN DER
INTERNATIONALEN
ASTRONAUTISCHEN
FÖDERATION

OFFICIAL JOURNAL OF THE
INTERNATIONAL
ASTRONAUTICAL
FEDERATION

ORGANE OFFICIEL DE LA
FÉDÉRATION
INTERNATIONALE
D'ASTRONAUTIQUE

HERAUSGEGEBEN VON / EDITORIAL BOARD / COMITÉ DES RÉDACTEURS

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. • A. EULA-Roma • J. M. J. KOOY-Breda
F. I. ORDWAY III-Huntsville/Ala. • E. SÄNGER-Stuttgart • K. SCHÜTTE-München
L. R. SHEPHERD-Chilton • J. STEMMER-Baden/Schweiz

SCHRIFTFÜHRUNG / EDITOR-IN-CHIEF / RÉDACTEUR EN CHEF

F. HECHT-Wien

VOL. III / FASC. 4

MIT 18 ABBILDUNGEN / WITH 18 FIGURES / AVEC 18 FIGURES

Inhalt — Contents — Sommaire

- Anderson, R. A., and C. S. L. Keay:** New Zealand Visual Observations of the Rocket Accompanying the Russian Artificial Satellite (With 1 Figure) . . 227
- Davis, R. J., R. C. Wells, and F. L. Whipple:** On Determining the Orientation of a Cylindrical Artificial Earth-Satellite (With 1 Figure) 231
- Leltmann, G.:** A Note on GODDARD's Problem (With 2 Figures) 237
- Sänger-Bredt, Irene:** Die Eigenschaften von Wasserstoff und Wasser als Arbeitsgase für kernenergetisch beheizte Raketentriebwerke (Mit 14 Abbildungen) . . 241



SPRINGER-VERLAG • WIEN

I. R. MAXWELL & CO. LTD. • LONDON / PARIS / NEW YORK

1957

Astronaut. Acta

Vol.
3
1957

ASTRONAUTICA ACTA

Fachbeirat / Advisory Board / Comité de conseil

J. Ackeret-Zürich · A. D. Baxter-Cranfield · E. R. Bergaust-Arlington/Va.
H. E. Canney, Jr.-New York · G. P. Casiraghi-Genova · A. V. Cleaver-London
G. A. Crocco-Roma · F. C. Durant, III-Lexington/Mass.
K. A. Ehrlicke-San Diego/Calif. · R. Engel-Héliopolis · J. Eugster-Bern
H. Gartmann-Bad Soden · W. Georgli-München · F. Gerlach-Bad Godesberg
A. G. Haley-Washington/D.C. · H. Hohn-Wien · H. J. Kaeppler-Stuttgart
Th. v. Kármán-Paris · H. G. L. Krause-Stuttgart-Bad Cannstatt
K. Krejci-Graf-Frankfurt/Main · D. F. Lawden-Christchurch · F. I. Malina-Paris
D. F. Martyn-Sydney · H. Nowotny-Wien · H. Oberth-Huntsville/Ala.
E. Roellger-Berlin-Charlottenburg · I. Sänger-Bredt-Stuttgart · W. Schaub-Ferndorf
S. F. Singer-Greenbelt/Md. · H. Strughold-Randolph Air Force Base/Tex.
T. Tabanera-Buenos Aires · B. Thürling-Karlsruhe · H. S. Tsien-Pasadena/Calif.
E. Vassy-Paris · H. J. White-Bluefield/W.Va.

Les Astronautica Acta paraissent chaque trois mois. Prix de l'abonnement annuel: sfr. 37.20, \$8.60, DM36.—, S 216.—.

Les manuscrits doivent être adressés au Prof. Dr. WERNER VON BRAUN, 907 Mac Clung Street, Huntsville/Ala. USA, ou au Prof. Dott. Ing. ANTONIO EUCLA, Via Lima 20, Roma, Italie, ou au Prof. Dr. FRIEDRICH HECHT, Wien VIII, Alserstraße 69, Autriche, ou au Ir. Dr. J. M. J. KOOP, Lector K.M.A., St. Ignatiusstraat 99 a, Breda, Pays-Bas, ou au M. FREDERICK I. ORDWAY, III, 3423 Lookout Drive, S.E., Huntsville/Ala., USA, ou au Dr. EUGEN SÄNGER, Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, (14) Stuttgart-Flughafen, Allemagne, ou au Univ.-Prof. Dr. KARL SCHÜTTE, (13 b) München 27, Ortnitzstraße 16 (Schleißbach 81), Allemagne, ou au Dr. LESLIE R. SHEPHERD, 28 Avon Road, Chilton/Berks., Grande-Bretagne, ou au Ing. JOSEF STEMMER, P.O.Box 37, Baden/Suisse, toutes les questions administratives à Springer-Verlag, Wien I., Mülkerbastei 5, Autriche.

Les articles sont publiés dans une des langues officielles de congrès. Chaque article doit être accompagné d'un résumé. Il est bien entendu que seuls les ouvrages qui n'ont pas encore vu le jour et ne seront pas publiés ailleurs, pourront être acceptés. En acceptant un article et en le publiant, le copyright exclusif passe aux éditeurs pour toutes les langues et pour tous les pays. Sans l'autorisation explicite de la part des éditeurs, toute reproduction photographique au moyen de microfilm etc. d'un numéro entier ou d'un article (partiellement ou in extenso), est interdite. Les auteurs ont droit à 75 spécimens gratuits de leurs ouvrages et peuvent en obtenir d'autres à un prix avantageux à condition d'en aviser les éditeurs au moyen de la feuille de commande attachée aux épreuves, quand celles-ci sont retournées aux éditeurs.

Les manuscrits doivent être écrits à la machine. Pour la rédaction de l'article un style concis et bref est recommandé. L'auteur est prié de limiter les illustrations au strict nécessaire, et d'envoyer chaque illustration sur une feuille séparée. Les illustrations en couleur ne peuvent être publiées qu'aux frais de l'auteur. Les frais causés par des changements ou révisions des épreuves par l'auteur, qui surpassent le 10% des frais de composition sont à la charge de l'auteur.

Eingelangte Arbeiten — Papers Received — Articles reçus

Fraeijls de Veubeke, B.: Le problème du maximum de rayon d'action dans un champ de gravitation uniforme.
Gerathewohl, S. J., O. L. Ritter, and H. D. Stallings, Jr.: Producing the Weightless State in Jet Aircraft.
Haviland, R. P.: The Communication Satellite.
Klemperer, W. B., and E. T. Benedikt: Selenoid Satellites.
Kooy, J. M. J.: On Relativistic Rocket Mechanics.
Ordway, F. I., III: Instrumentation of Artificial Satellites.
Perkins, F. M.: An Analytical Solution for Flight Time of Satellites in Eccentric and Circular Orbits.
Singer, S. F.: Interplanetary Ballistic Missiles — A New Astrophysical Research Tool.
Vertregt, M.: Die Bahnbestimmung aus dem Vektor der Bahngeschwindigkeit.
Winterberg, F.: Besondere Brennstoffverteilungen und Kühlungsprobleme in Reaktoren von Kernraketen.

Vol
3
195

Vol.
3
1957

Inhalt — Contents — Sommaire

Anderson, R. A., and C. S. L. Keay: New Zealand Visual Observations of the Rocket Accompanying the Russian Artificial Satellite (With 1 Figure) . . .	227
Baker, R. M., Jr., siehe Klemperer, W. B.	
Baumann, G., siehe Kaeppler, H. J.	
Bednarczyk, H.: Beitrag zur Theorie der Wasserdampfakete (Mit 4 Abbildungen und 4 Tafeln)	153
Canney, H. E., Jr., and F. I. Ordway, III: The Uses of Artificial Satellite Vehicles. Part II	1
— — — Erratum	225
Cremona, C. E.: Metodo fotografico per la determinazione della resistenza aerodinamica di missili in volo (Con 4 figure)	52
Davis, R. J., R. C. Wells, and F. L. Whipple: On Determining the Orientation of a Cylindrical Artificial Earth-Satellite (With 1 Figure)	231
Goldman, D. T., and S. F. Singer: Studies of a Minimum Orbital Unmanned Satellite of the Earth (MOUSE). Part III. Radiation Equilibrium and Temperature (With 14 Figures)	110
Hecht, F., und R. Patzak: Chemische Analyse von in Tiefseesedimenten gefundenen mikroskopischen Kügelchen vermutlich kosmischen Ursprunges . . .	47
Kaeppler, H. J., und G. Baumann: Über Systeme mit chemisch reagierenden Komponenten im Gleichgewicht. I. Die Berechnung der Gemischzusammensetzung	28
Keay, C. S. L., siehe Anderson, R. A.	
Klemperer, W. B., and R. M. Baker, Jr.: Satellite Librations (With 4 Figures) . .	16
— — — Additional remark	226
Kooy, J. M. J.: On the Application of the Method of Variation of Elliptic Orbit Elements in Case of a Satellite Vehicle (With 11 Figures)	179
Leitmann, G.: A Note on GODDARD'S Problem (With 2 Figures)	237
Michielsen, H. F.: The Case for the Low Acceleration Spaceship	130
Ordway, F. I., III: Project Vanguard — Earth Satellite Vehicle Program. Characteristics, Testing, Guidance, Control, and Tracking (With 12 Figures) . .	67
— siehe auch Canney, H. E., Jr.	
Patzak, R., siehe Hecht, F.	
Peschka, W.: Über eine Möglichkeit zur Erhöhung der Ausströmgeschwindigkeit bei Raketentriebwerken (Mit 9 Abbildungen)	100
Rosenstock, H. B.: The Effect of the Earth's Magnetic Field on the Spin of the Satellite	215
Sänger, E.: Zur Flugmechanik der Photonenraketen (Mit 2 Abbildungen) . .	89
Sänger-Bredt, Irene: Die Eigenschaften von Wasserstoff und Wasser als Arbeitsgase für kernenergetisch beheizte Raketentriebwerke (Mit 14 Abbildungen) . .	241

Singer, S. F., siehe Goldman, D. T.

Wells, R. C., siehe Davis, R. J.

Whipple, F. L., siehe Davis, R. J.

Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus

FINKELNBURG, W.: Einführung in die Atomphysik, 4. Auflage (Besprochen von F. HECHT)	225
GEBELEIN, H., siehe SCHULER, M.	
Jahrbuch 1955 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e.V. (Besprochen von H. STÜMKE)	177
Jahrbuch 1956 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e.V. (Besprochen von H. STÜMKE)	177
Meteors (Herausgegeben von T. R. KAISER) (Besprochen von F. HECHT) . .	224
MÜLLER, F.: Leitfaden der Fernlenkung (Besprochen von J. M. J. KOOV) . .	178
Raketentechnik und Raumfahrtforschung, Hefte 1 und 2 (Besprochen von F. HECHT)	223
SÄNGER, E.: Zur Mechanik der Photonenstrahlantriebe (Besprochen von H. GARTMANN)	222
SCHULER, M., und H. GEBELEIN: Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen (Besprochen von K. SCHÜTTE)	87
— — Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen (Besprochen von K. SCHÜTTE)	87
Spaceflight, Vol. I, Hefte 1 und 2 (Besprochen von F. HECHT)	88
SUTTON, G. P.: Rocket Propulsion Elements, 2. Auflage (Besprochen von F. HECHT)	224

The Uses of Artificial Satellite Vehicles¹

Part II.

By

H. E. Canney, Jr.², AAS, and F. I. Ordway, III³, AAS

Abstract. The satellite as an observation and military base, as a communications relay station, as a radar beacon and navigational fix are treated. The paper concludes with sections on the astronomical significance of the artificial satellite and miscellaneous considerations.

Zusammenfassung. Im vorliegenden Teil II wird der künstliche Trabant als Beobachtungs- und militärische Basis, als Nachrichten-Relaisstation, als Radar-Warte und Fixpunkt für Navigation behandelt. Die Arbeit endet mit Abschnitten über die astronautische Bedeutung des künstlichen Satelliten und verschiedenen anderen Betrachtungen.

Résumé. Dans cette seconde partie le satellite est envisagé comme base d'observation, base militaire, relais de communication, faisceau radar et repère de navigation. L'importance d'un tel satellite pour l'astronautique ainsi que des considérations d'ordre général terminent cet exposé.

E. Observation from the Satellite Vehicle

The satellite vehicle's role of observation cuts sharply across the majority of the important scientific disciplines associated with it. What is being observed determines not only the discipline involved but also tends to fix the altitude of the orbit in which the vehicle will travel. In the widest sense it may be said that such a vehicle can observe two categories of things: the Earth, and the Universe at large. In the latter case, the vehicle is an astronomical observatory regardless of the orbit and regardless of whether it travels around the Earth or some other body. In the former case, the vehicle may be regarded broadly as a geophysical observatory if one will concede, for convenience, that such matters as iceberg patrol and military observation are very superficial cases of modification of the physical body of the planet.

Astronomical observation from a satellite vehicle has been treated in the first part of this paper, and agrees in general with the astronomical role as discussed here, except perhaps that the geophysical satellite vehicle (broad sense) may be regarded as a "probe" insofar as it observes a globe from close range. Thus the Earth geophysical satellite vehicle (broad sense) may be regarded as an "Earth Probe", just as a similar vehicle circling Mars would be a "Martian Probe".

¹ This paper (Parts I and II) was presented as a whole at the Sixth I.A.F. Congress at Copenhagen, August 4, 1955, and has been shortened for presentation to publisher. First version dated June 30, 1955. Since it was prepared before the U.S. Earth Satellite Vehicle Program was announced, it obviously does not reflect development that occurred during the last year and a half. Readers are referred to satellite reports being carried in this journal.

² Engineering Division, Bell Aircraft Corp., Buffalo, N.Y., USA.

³ Guided Missiles Division, Republic Aviation Corp., Hicksville, N.Y., USA.
Both authors now with General Astronautics Corp., Oyster Bay, N.Y., USA.

The role of observation has been identified with the satellite vehicle from the very beginning. Refuelling was also mentioned at various times but observation seems to have dominated.

The first mention of a station in space is believed to be that described in a German novel by KURD LASSWITZ, entitled "Auf zwei Planeten", published in 1897. In LASSWITZ's story, this station was discovered over the North Pole at an altitude of 4,000 miles and was being used by Martians to observe our planet. Superficially, this was not a bad choice of location since a large part of the world's population dwells in the region north of 30° north latitude. At that height, New Orleans, Cairo, Lhasa (Tibet), and Tokyo would just lie in the fog of the horizon, but most of the significant countries of Europe, Asia, and most of North America would be quite visible, barring overcast. Vehicle it may have been, but it was not a satellite vehicle as we understand the idea, for it had no motion relative to the Earth. At 4,000 miles altitude the Earth's gravitational pull would have been far too strong for such a station to rely on the mechanics of an orbit around the Sun. According to the story, the Martians sustained the vehicle by a field of reversed gravity, induced by the connection between a building they had constructed on the pole and the structure high above the pole, one Earth-diameter from the center of the Earth [68]. This means of remaining aloft was apparently somehow related to an earlier means of space travel these fictional Martians had used... a special utopian material which resisted the force of gravity, or rather, avoided it by causing gravity to flow around it. This means of space travel, upon inspection, reveals itself, unfortunately, to be unavailable to the user even if it were possible. As LEY put it, in describing another such vessel: "The pilot would not need his wonderful ship... To overcome the difference in gravity potentials between the Earth and the ship he would have to jump aboard with a push of nearly a billion pounds. If he were that strong, he could jump directly to the Moon instead."

In 1923 OBERTH regarded the satellite vehicle mainly as an experimental station. He mentioned the possibility of using it as a refuelling point but considered this a sideline.

NOORDUNG's triple station, connected by cables, featured a telescope for astronomical observation, but was also thought suitable for observation of activities on the ground. As the altitude was 22,300 miles, this seems a bit optimistic of NOORDUNG unless the same telescope was also used for looking at the ground. Even so, he restricts himself unnecessarily. The station would be without motion with regard to the Earth and only one area could be observed and only from the equatorial plane.

An observational link between the fields of astronomy and geophysics occurs in the matter of measuring the intensity of cosmic rays and the interaction between the cosmic rays and the magnetic field of the Earth as a whole. The bombardment of cosmic rays also produces chemical and physical changes in the upper atmosphere. Measurement of these effects is also observation.

Geophysical observations themselves include measurement of tidal effects upon vehicles as sensed from within the vehicles. Also included are such observations as the measurement of magnetic and gravitational anomalies, both for general mapping purposes as well as prospecting for petroleum and other valuable deposits. Aerial photography of the ground is a well-known adjunct to regular map making.

A recent paper [69] on Earth scanning techniques has treated the problem of gathering information about certain conditions on the surface, and transmitting the obtained data back to the ground. STEHLING considered two cases (assuming a 500 mile altitude), one employing an optical objective lens image-converter system, the other a microwave radar scanner.

Troop movement would be only one aspect of military observation. A well equipped satellite vehicle could monitor industrial growth, or drive it underground at great expense to the potential enemy. The state of national logistics could be assessed by traffic studies of the nation's highway, rail, air, and water transportation.

The state of development of their natural resources could be observed. Studies of mass movements of people during the course of a day, done repeatedly, might reveal useful information to military intelligence experts or psychological warfare officers.

The mere presence of another nation's satellite vehicle above you is a spectacular force in psychological warfare itself. The knowledge of being constantly watched can be most depressing as would the suspicion that the vehicle might also be armed for bomb-dropping by command, or that the orbit was only temporary (either intentionally or by accident) and if intentionally, that it might be equipped for some sort of destruction when it came down.

A more congenial type of observation is the use of the vehicle for exploration of little-known areas or areas which are accessible only with difficulty, such as polar areas, large deserts and mountain ranges, jungles, and wide expanses of ocean. Iceberg patrol would be greatly simplified, and such a vehicle might well be used to locate downed airplanes, distressed or derelict ships, or, perhaps even lost expeditions if this sort of thing happens anymore.

The satellite vehicle quite obviously is the agency for observing anything on a large scale. Even if you are not interested in what your neighbor country is up to, the inspection of your own country or continent may tell you many useful things you never suspected about commerce, sociology, and even political activity.

Weather observations may be made from the satellite vehicle by combining albedo measurements and cloud tracking with other more conventional procedures. It would be a useful task to establish the economy of the satellite by comparing its cost with that of maintaining weather and iceberg patrol ships, for example. Information gathered from weather observation would be transmitted to Earth from an unmanned station by some sort of automatic electronic weather system. One such unit has been developed by the Air Navigation Board, and employs a large "memory" drum, on which weather reports are stored, to be transmitted on teletypewriter [70]. At low altitudes atmospheric drag measurements may be made which determine how much braking may be expected for different densities of atmosphere. This is of interest not only with respect to the lifetime of the satellite vehicle itself but also in connection with calibrating the flights of antipodal bombers and other gliders, and for re-entry into the atmosphere by ferry rockets.

The satellite vehicle has also been suggested as a military reconnaissance agency, and, knowing human nature, this will probably be the argument that will get one established. The argument has been that nothing can be hidden from such a satellite equipped with radar and telescopes. Even a single plane taking off from a carrier could be easily detected [71]. This is perhaps oversimplified somewhat, since the same precautions of camouflage, movement beneath dense overcast and by night, dummy installations, and decoy maneuvers may frustrate the satellite vehicle just as much as it does conventional aerial observation. Movements might be developed which would be geared to the orbital period of the satellite... moving troops when the vehicle is on the other side of the world when there was no overcast locally. This might require a prohibitive number of satellites to keep a given area under constant surveillance. If optical and radar equipment can be developed which have adequate powers of resolution the orbits may be raised and fewer satellites would be required. Also they would be harder to destroy.

F. The Artificial Satellite Vehicle as a Military Weapon

It is deplorable to think of the satellite vehicle as a military weapon. Yet, a discussion on the uses of a satellite can be neither realistic nor complete if the military implications are ignored. It is general knowledge that satellite programs, at least in the study phases, are being undertaken by several governments. The late secretary of Defense FORRESTAL announced in 1948 that the U.S. Government was supporting some sort of satellite program. Very recently, Aerojet-General Corporation's president D. A. KIMBALL said [72] that his enterprise could commence *today* the fabrication of an orbital vehicle. He went on to assert that his firm would give "A delivery date and a fixed price on the contract". Whether KIMBALL was thinking of a military or research vehicle is not certain, but it seems likely that initially small scale vehicles, designed for performing scientific investigations, would be established, which could grow into larger ones with military capabilities as the development program continued.

In the Soviet Union the creation of a "Permanent Interdepartmental Commission for Interplanetary Communication" was announced, with Dr. PETER KAPITSA as director. Its first task was reported to be "the organization on an automatic laboratory of scientific research in cosmic space... which would revolve around the earth as a satellite..."

In these days, almost anything can be a weapon, and almost anything may be expected in the conduct of a war. With uranium-and cobalt-enriched hydrogen warheads, large rocket-powered vehicles and multi-axis inertial guidance, an appalling new concept of warfare emerges: the intercontinental ballistic missile (ICBM). Such technological considerations as are involved in the development of these missiles are also implicit in the development of what some people regard as the ultimate weapon: the armed satellite vehicle. The unarmed vehicle is, engineeringwise, of the same order of magnitude as the ICBM. If an ICBM can be developed there should be no difficulty in establishing a satellite vehicle. At the present time no one contemplates the possibility of a fully developed satellite combat vehicle appearing at the same time as the perfection of the ICBM; this would be nearly in the next higher order of magnitude.

At first, the satellite doesn't have to do anything. All it has to do is to be up there, and your opponent, as STEWART ALSOP puts it, is notified that you have gained a commanding lead over him technologically [73]. His people are aware that if you can put a harmless satellite up there, you can presently put an armed one there... or he may wonder if your harmless satellite vehicle is really harmless.

In the early days of astronautics the main focus of study was getting into space more or less for its own sake, for science, or for sheer high adventure. HERMANN OBERTH in the '20's suggested vast mirrors for converging the Sun's rays on the polar icecaps, converting them to useful land by changing the climate, and the use of planar mirrors to light cities by night. Recollection of the burning power of curved mirrors, a notion dating from Greek antiquity, is said to have aroused some apprehension in Allied quarters during World War II when it was thought the Germans might attempt a huge sodium-foil mirror in space, based on OBERTH's design. Control over the curvature and aim would be formidable undertakings, but it would not be essentially different in character from that involved in using the same mirror, pointed the other way, for astronomical purposes. Such a mirror, OBERTH proposed, would measure 10 kilometers in diameter, would orbit at an altitude of 1000 kilometers and was thought capable of burning cities. Those were the days when atomic bombs were a highly academic proposition. While OBERTH had considered the possibility of a solar mirror in space, weapons were not his main interest.

Today the question arises of firing atomic guided missiles from a satellite vehicle. Due to their great speed and small size, they would be virtually interception proof, it has been argued. This may be true, but is it worthwhile to bring missiles into orbit and then fire them at the ground? A surface-to-surface missile can presumably do the same thing and more cheaply. It has the added advantage that it may be fired at the target at will, whereas the satellite must wait until it is in a favorable position. This may be countered with the argument that the surface-to-surface missile would probably have to be an ICBM to reach all key targets, and because of its size would require extremely large and expensive launching installations, almost certainly underground, since their strategic value would be such as to forbid their exposure to counterfire. Even if the satellite vehicle were not armed, it would probably be extremely valuable for target selection, perhaps for midcourse or terminal guidance, or even as a navigational reference for certain missiles.

Until a year or so ago, all of the arguments seemed to be on the side of the space station, armed or unarmed. The mere fact it was there (although undeniably a strong psychological factor) seemed to be an argument enough. No one brought up the other side of the picture. Suppose one nation did not want another nation's satellite in orbit because it was considered a territorial violation and an invasion of privacy — what then? If rockets can be sent up with men to assemble a station, smaller ones can be sent up with warheads to destroy it.

One counter-satellite proposal pointed out that a small missile sent up to the satellite vehicle's orbit from the other side of the Earth, and in the opposite direction, and exploded, would create a cloud of fragments that would riddle the vehicle several times a day forever.

Momentarily, things looked very dark for the satellite vehicle. Then it was remembered that in space there would be no air friction to contain or limit even a mild explosion. The fragments of the explosion would immediately disperse, reducing the puncture probability nearly down to that already existent for natural meteors out of space. Firing the fragments like birdshot would not help much since the impetus would be tangent to the orbit. They would travel in a cloud and need an incredibly good aim to come back into the vehicle's orbit at precisely the point where the vehicle happened to be at a given moment. If the vehicle (or the party sponsoring the vehicle) ignored the cloud of fragments, conceivably the precession of orbital nodes might take care of the correct intersection, given enough time. But the sponsoring party would not wait for this. They would change the orbit. Even a guided counter-satellite rocket would have a tricky time assuming the correct orbit for collision.

The general question of combat between a satellite vehicle and guided missiles is an intriguing one, which seems to depend largely upon logistics. The station, in general, has the well-known advantage of altitude, and a supply of small missiles would presumably be able to take care of a number of projectiles sent up from the ground. Each counter-satellite missile sent up would need massive booster stages and would be an expensive proposition. It is conceivable that a satellite vehicle armed with 30 "Nike" type missiles could destroy billions of dollars worth of counter-satellite rockets. It might also discharge decoy material to cause the rockets to home-in on a harmless cloud of metallic chaff. In rebuttal to this, it might be said that the counter-satellite missile might be designed to discriminate against chaff and jamming and in addition carry an extra, smaller, missile to deal with the "Nike", and then go on itself to destroy the satellite vehicle. This smaller rocket, however, could be met with a companion rocket to the "Nike", perhaps a guided "Mighty Mouse". But there is a limit to this sort of thing. The realities of logistics enter in here at some point, before we arrive at the absurdity of each weapon carrying a series of smaller and smaller ones, *ad infinitum*.

A vehicle as harmless as a weather observatory, such as the one suggested by Dr. HARRY WEXLER of the U.S. Weather Bureau, is unfortunately almost in the same category as a vehicle designed for military reconnaissance. One country may object to another's weather vehicle on nearly the same grounds as a military space station. Four thousand miles is a long way up, and raises the question "How high is sovereignty?" Surely it is not infinite. Even if the Earth were not in any kind of motion, ownership of the whole universe above your country is a bit presumptuous.

How high, then, is sovereignty? SCHACHTER thinks that the vertical limit is the top of the atmosphere, beyond which is "free space" [75]. MEYER [76] also considers outer space to be free territory. Regarding artificial satellites, he used the open ocean seaport planes of the '20's as models to prove the admissibility of building the satellite in open space. He pointed out that it had been viewed proper, from a legal standpoint, to build such seaports, and that the construction of satellites in space would not pose any international legal problems, based upon what we can intelligently suppose today. Thus no nation has the legal right to interfere with space vehicles passing over their territory. HORSFORD believes [77] it is "reasonable... that in the light of modern international theory, outer space... is likely to be considered a free navigable area as are the high seas", subject to such conventions as carrying the national flag of the owner. The precedent of the high seas indicates that space ships and satellite vehicles would have national sovereignty. Molesting a ship or satellite could thus be construed, as with surface vessels, as an act of piracy or war.

The precedent, however, is not quite consistent. Ships roaming the high seas cannot see inside your country. Also, because of the well-known advantages of altitude, an enemy roaming space is infinitely more dangerous than an enemy roaming the high seas. The United Nations may conceivably outlaw warfare in space, but the enforcement of it is doubtful. Perhaps retaliation will be the only dissuader.

G. The Satellite Vehicle for Communications and Navigation

The communications satellite vehicle, because of its location above the atmospheric envelope of the Earth, enjoys advantages and suffers limitations which are somewhat analogous to those affecting the extraterrestrial astronomical observatory. Both are dedicated to apprehending as much radiative energy as possible and both suffer badly if placed in unsuitable orbits. Both are a problem by just being in orbits, and both can be oriented either to the mother planet or to astronomical space. In the navigational aspect, that is, its use as a reference for missile control or for radar or celestial procedures, the vehicle may be thought of as Earth-oriented.

A fair amount of study has already been undertaken in two cases of the satellite as a communications agency, first as a transponder or repeater for terrestrial communications, and secondly, as a means of practical communications across interplanetary space to Mars in the event such an expedition were mounted.

Frequencies high enough to pierce the electrified layers of the ionosphere will naturally be required. Generally, frequencies above some 50 megacycles will pierce the ionosphere and pass on into interplanetary space, although the intensity of sunspots will alter this figure. Out in space, signal-to-noise ratios will naturally be greatly improved over those obtaining on Earth; minimum requirements would indicate a figure of about 100 to 1 for Earth to moon transmission although it would depend on what frequencies were intended. If both the transmitting and receiving antennas are situated in space, special conditions will obtain, as will be shown later. Fading, in the terrestrial sense, will undoubtedly be reduced but in interplanetary communications conditions in the upper atmosphere may often seriously affect the signal strength, affecting, in turn, reception of an outgoing beam to Moon. It will be seen from what follows that simple penetration of the ionosphere is hardly the whole story. Space, while offering better communications conditions, is not free of noise. Thermal noise, galaxy noise and solar noise all exist and vary in intensity.

On the surface of the Earth, transmission distances are affected by the frequency of radio signals, topography, electrical condition of the soil, the season, time of day, weather, and sunspots. The atmosphere, or more accurately, the HEAVISIDE Layer, is opaque to signals up to about 30 megacycles, though special calculations, taking into account the rapid fluctuations of the various layers of the ionosphere, must be used to determine accurately the maximum useable frequency ("MUF"). It is apparent, then, that several things may happen; waves may be reflected, absorbed, allowed to penetrate, or some combination of these. Very short waves and microwaves, which on the surface of the Earth tend to be somewhat line-of-sight, lend themselves to convenient focusing, and hence beaming at satellite vehicles for retransmission to the point of destination.

CLARKE suggested this use for satellite vehicle ten years ago [78]. His now well-known proposal featured three spherical relay stations (transponders) in a 24-hour (22,300 mile) orbit 120 degrees apart. These were designed to provide continuous worldwide radio and television coverage, as well as navigation and safety services. CLARKE didn't specify, but since the vehicles were interconnected by microwave link we may assume that the entire system was originally conceived as a system of active repeaters. The vehicles could thus exchange signals with each other as well as with points on the ground. Being stationary in space with respect to the Earth, he suggested that the transmitting and receiving antennas, once aimed at the vehicles, could be locked.

The consensus is that satellite radio and television communication will enjoy a tremendous improvement in signal to noise ratio, due in large part to the shorter transit distances of signals through atmosphere. By depending upon the vehicles instead of the ionosphere, the influence of fade, skip and magnetic storms will be greatly reduced.

It has been speculated that satellites may ultimately replace most networks of cables and conventional television channels, and some applications of radio. Over and above the general problem of getting a satellite into orbit there are some immediate and practical considerations bearing on terrestrial communications, objectives which affect the selection of the orbits themselves.

This matter has been studied by Dr. JOHN R. PIERCE. A summary of his views may be found in the text of Appendix F of a proposal submitted to the National Science Foundation by the American Rocket Society [79], and was expanded subsequently [80, 81]. It is useful to dwell at some length on the substance of PIERCE's study for its balanced approach to the problem. He mentions that a 36-channel two-way transatlantic submarine cable is being laid between the United States and England for a reported price of \$ 35 million. A channel thirty times this wide, needed for television transmission, would cost in the neighborhood of \$ 1 billion and is scarcely worth it. A combination of land and submarine connections by way of Greenland and Iceland might help somewhat but the prevailing climate along the route would tend to discourage that solution. A similar route to Asia by way of Bering Strait has these and other disadvantages. He mentions a proposal which featured a continuous chain of airplanes flying the Atlantic and understandably finds this unattractive, though technically feasible. (A similar idea had previously been suggested in the United States for long-distance overland television transmission. The germ of the satellite transponder idea is detectable.)

In introducing the idea of the satellite, PIERCE makes the point of stressing its inferiority to overland networks such as the \$ 40 million TD2, built by the American Telephone and Telegraph Company, because of its inability to drop and add hook-ups along the routes it covers. Over the seas, however, he feels that the satellite could be competitive. A condensed summary of four possible approaches (there may well be others) for a 5-megacycle video channel provided by an 8-digit binary pulse code modulation system employing a 10-centimeter (3000 megacycle) wavelength and Earth antennas 250 feet in diameter, is shown in Table I.

One stationary orbit, as we know, exists around the Earth at 22,300 miles. Another, mentioned by CLARKE [82], is a circumterrestrial orbit 40,000 miles beyond the Moon: "A body here would always be invisible from the Earth, being permanently eclipsed by the Moon. As it would appear fixed over the very center of our satellite's hidden hemisphere, it would be an ideal site for a radio transmitter when the far side of the Moon is colonized." How this arrangement contacts the Earth is not clear unless this is supplemented by repeaters placed at the Moon's trojan points. He may have had in mind, as he suggests elsewhere, an artificial planet travelling in the Earth's orbit, to enable us to "see around the Sun". The only place you could rely on the repeater remaining at a fixed distance is at one of the trojan point; otherwise it would slowly drift away from the Earth.

VON BRAUN, in the final chapter of "The Mars Project" [83], considers the problem of communications with Mars in terms of a situation where one end of the link is on the surface of the Earth. By way of illustrating useful parameters, he explores two cases, one at 600 megacycles with 60,000 watts of power and

Table I. *Features of the communications satellite: four cases*

Case	Type of Repeater; Altitude	Power Output in Watts		Orientation Required km/degrees	Advantages	Disadvantages
		Earth Transmitter	Repeater Transmitter			
A	304.8 m (1000 ft) sphere at 35,903km	10^6	0	0	No orientation problem. Practically no motion	Very expensive because of size and altitude
B	30.48 m (100 ft) sphere at 3542 km	10^5	0	0	Less power than A. May be cheaper. No orientation problem	More vehicles required (10). May produce multiple images
C	30.48 m circular planar mirror at 35,903km	5×10^4	0	$\pm 29/\pm 0.047$	Less power than A or B. Higher reflectance	Very serious positioning and orientation problems. Needs power for servos. One destination
D	3.048 m antennas; vehicle at 35,903km	10^2	0.03	$\pm 580/\pm 0.95$	Very small power needed in ground equipment. Less orientation problem. Small antennas and vehicle size	Power drain in satellite. Limitation in number of channels and in amount of modification possible to ground equipment

Cases A and B employ metal spheres which scatter signals isotropically, so that one need only point the beamed transmitter at them. Power requirements for ground equipment in Case A seem excessive, and the 1000 foot spheres necessary at that altitude are no easy matter. Case B reduces all elements by a factor of 10 except the number of spheres, which is just the opposite. Although in fairly rapid motion, one or more would always be visible to the transmitter, and the ground power requirement of 100 kilowatts is not too serious.

Case C reduces drastically the power required but introduces some very serious problems of positioning and orientation. Solar and lunar perturbations would require moving masses attached to the mirror by radio control, though satellite power requirements would be small. Perturbations of the orbit would probably be large enough to demand steerable antennas on the ground. Furthermore, a planar mirror reflects signals to only one destination.

In general, the great advantage of passive repeaters (cases A, B, and C) is the huge number of two-way channels possible at various wavelengths. Modifications

another at 3000 megacycles with the same power. The space ship transmitter weighs three metric tons. The first case, 600 megacycles, uses an antenna area of 10^6 square centimeters, which would reach Pluto with doubtful readability. This would allow an excess of 36 decibels even at the maximum distance between the Earth and Mars. This reserve permits a theoretical reduction in transmitter power and antenna size and results in an increase in bandwidth, allowing transmission of speech and music. The second case, 3000 megacycles, uses an antenna area of 7.5×10^4 square centimeters, which would permit radiotelephony up to 30 000 000 miles and radiotelegraphy at any time.

Transmission between a receding space ship and an orbiting station, could, under certain conditions, have a very considerable DOPPLER effect, the maximum possible being 298 kilocycles per second. Purely from the standpoint of signal-to-noise ratio, the frequency range between 100 and 200 megacycles appears to be most favorable. Below 100 megacycles cosmic noise increases and above 200 megacycles receiver noises increase. Received signal power is proportional to bandwidth but so also is noise power in the receiver. Consequently, a net power boost by means of signal pulsing avails little, and we would seek to narrow bandwidths rather than broaden them [83]. This is not desirable.

Another aspect of frequency, mentioned by SMITH [84], indicates that spectrographic effects set in between 10 000 and 30 000 megacycles. In this range we find atmospheric absorption lines for water vapor and oxygen. Considering all these data, one may suppose, from an inspection of Table 34 in "The Mars Project", that a compromise frequency of about 1500 megacycles would work out about as well as any, though VON BRAUN recommends 300 megacycles with a power of only 1000 watts to capitalize on the frequency characteristics of the Resnatron tube and the inherently wider bandwidth permitted. This does not contradict the statements about the 100–200 megacycle band, since they were made purely from the standpoint of signal-to-noise ratio. Compared to the theoretical reach of the 600 megacycle transmitter, on the basis of frequency, this may seem somewhat marginal. But if you are limited to three metric tons of weight, you consider first how far you must reach, settle for the minimum power that will accomplish this, and then juggle all the rest of your parameters in such a way as to convert what you have gained into bandwidth in the transmitted signal.

A preliminary study of such factors as those discussed in this section does suggest that for the solar system, at least, we are not likely to have too much difficulty in setting up suitable communications network between the ground

and improvements could be made to the ground equipment without the need to modify the satellite. The great disadvantage is the large power requirements for passive repeaters, especially with the spheres.

Case D, an active repeater, requires power, but only a fairly small amount. A wide beam, coupled with a beam shift only half that for a mirror, reduces but does not remove the orientation problem. Unfortunately, the power supply required by an active repeater has a finite life (though solar batteries or generators may alleviate the problem). More serious is the limited channel capacity. Adjustments to the ground equipment and changes in the nature of the signal may improve the information content of messages, but with a predesigned transponder this is not likely to help much. Of the four possibilities presented by Dr. PIERCE, Case B is the most attractive. It is susceptible to early attainment, and can be used immediately also for navigation and geodetic triangulation. The only forbidding aspect is the large number of satellites specified.

stations and the satellites and travelling space ships, once we have worked out the performance of the vehicles and the ships themselves. Ground stations on the Moon and planets will permit the erection of larger installations than those conveniently possible in space, and these, probably with transponding assistance of smaller units in space, show promise of fulfilling most of our communications requirements. The only novel problem associated with interplanetary communications, or between the Earth or Earth satellite and a space ship over interplanetary distances, is the matter of signal transit, which occurs at the rate of eight minutes per astronomical unit. This may conceivably be serious in emergencies which often depend for their solution on rapid exchange of information. Signal transit to Mars at its closest approach would be something on the order of three minutes each way or six minutes to get the answer to a question. For faster exchange perhaps some procedure can be worked out with substitutes for the conventional comment-and-response technique, an overlap of messages resembling a conversation with two parties talking at the same time. This is not pleasant but with practice operators could probably be trained to entertain in their consciousness both incoming and outgoing information at one and the same time. They may perhaps be so highly trained that they do this even when it is not necessary, just to keep in practice.

Returning to Earth, again we are reminded that the Earth satellite vehicle or artificial satellite has another general communicative role related to geodesy... its use as an aid to navigation. In its simplest terms it may be the irreducible minimum satellite being used simultaneously by other people for geodetic triangulation. In both cases the regularity of the orbit is the feature that enables men to predict position at a given time and from that to calculate positions on the surface of the globe. If a simple radar or radio beacon can be installed, aided or sustained by solar power, the taking of fixes on the artificial satellite would probably be greatly eased.

It is hard to see what use this role of the satellite would serve to a spaceship which already has an excellent prospect of the stars and planets. The beacon, however, does suggest a means of conveniently locating the vehicle in the event it is to be serviced or replaced. To the earth-bound, the advantage is fairly obvious. Optical fixes could be taken with great precision by day and radar fixes by night or through overcast, and would be of equal utility to both aircraft and surface vessels.

H. Space Flight and the Artificial Satellite Vehicle

The third reason (see Introduction) for the existence of a satellite, and perhaps the chief reason for study of it, is the satellite's role as a space station. Hardly any discussion of space flight occurs without some reference to it.

Most obvious is the use of the space station for refuelling and repair. While we are restricted to chemical propellants (and this may be for some time to come) refuelling is sure to be the dominate problem of space flight. Because of the high price paid in the expenditure of propellants, some rather elaborate arrangements of tanker rockets and a system of many stations along the route will be required. Getting any stations into orbit will be difficult at first, and the very limited number of stations which can be established on a budget, together with uncertainty about landing conditions, will probably dictate that flights around the Moon and Mars will be made a considerable number of times for each body.

For purposes of take-off into orbit around the Earth, a rocket will follow the equator with a relatively low tangential velocity of about a half a kilometer per

second, and curve into the horizontal element as soon as possible. In this way, one can minimize the effect of gravity which operates substantially only in the vertical component.

In general, the procedural steps of a completed voyage may be summarized as follows:

1. Establishment of satellites around Earth in one or more orbits,
2. Construction of deep-space vessel at orbit around the Earth,
3. Provisioning satellites and deep-space vessel by ferry rockets,
4. Fuelling of deep-space vessel,
5. Deep-space flight,
6. Leaving fuel at destination orbit,
7. Descent, and ascent after appropriate stop-over,
8. Refuelling at destination orbit,
9. Deep-space flight,
10. Refuelling at starting orbit for rocket retard engines to assist aerodynamic braking,
11. Descent to Earth.

These, of course, ignore the mechanics of maneuver because they are intended only to point up the general dominance of fuel logistics. The extreme infancy of space flight and the pitiful inadequacy of chemical propellants as they are now used are indicated by the extraordinary procedures we must follow, the many refuellings, and the discard of hardware built at great expense. Some new and spectacular development in chemical propellants, or some totally new propellant agency such as atomic energy, ions, or photons, is mandatory to improve our logistics. Failing this, we are more or less confined to the Solar System forever, and will litter interplanetary space with fabulously expensive trash as time goes on.

Since we know little as yet about space flight, we cannot speculate very meaningfully on any new forms of propulsion, but, for that very same reason, we cannot have any grounds for pessimism about the situation getting better. Surely we cannot consider space flight to have come of age until a self-sufficient space ship rises from the surface of the Earth, proceeds directly to the Moon, lands expertly, remains for a while, takes off from the Moon, proceeds directly to the Earth and lands again expertly... no jettison of sections, no refuelling in orbits, nothing left on the Moon unless by choice. The true age of flight did not arrive when the NC-4 crossed the Atlantic Ocean; it arrived when people were flying the Atlantic Ocean in commercial airplanes as a matter of course. When space ships can fly to the Moon as described above we may say that space flight has come of age... and that the flights are made as a matter of course, though not necessarily on a scheduled commercial basis.

Typical of present refuelling propositions is the idea of the "space fuel dump" [85]. Here three ships would take off at once and enter into adjacent parallel orbits, and be brought together somehow by magnetic means. Fuel from two of them would be pumped into the third, fuel and provisions would be transferred and the third would depart for the Moon. Special extra tanks would be left in an orbit around the Moon (a familiar idea) to be later used for the return trip. Way stations in circumsolar orbits were suggested (also a familiar idea). The logistics are possible but rather imposing.

EHRIKKE visualizes large space stations as possible through the use of ferry rockets, using a lower orbit at 130-150 miles and major orbits at between 600 and 1000 miles [86], all in the equatorial plane, to capitalize on tangential velocity.

The lower orbits at 130—150 miles would obviously be temporary — lasting a few hours at best — for the sole purpose of transfer of cargo. Higher temporary orbits at 360—400 miles would last for periods measuring in months, permitting the assembly of deep-space vessels for interorbital flight. An orbit at 30 000—40 000 miles would be unoccupied except for a few days at a time during the time of arrival from other planets... long enough to pick up a vehicle from the Earth. With the exception of this orbit, all orbits would fall below 700 miles altitude [87].

At this point, the A, B, and C orbits of GUIDO VON PIRQUET come into mind. It will be remembered that he advanced an idea in 1928 involving three orbits. Satellite vehicles were placed at 760 and 5000 kilometers and a "liaison rocket" operated in an elliptical orbit tangent to both. As all bodies circled the Earth in the same direction they differed in velocity by about 3000 miles per hour [88, 89]. It is reported that he later abandoned the idea.

Orbital supply also has very definite economic aspects, most of which revolve around the basic problem of how to carry bulky and heavy payloads into space with a minimum of developmental efforts and cost per unit of payload. Theoretically this is best done by maximum acceleration, but since men are likely to go on many of the rockets, permissible accelerations must be adjusted downward to what men can endure. This cannot be done with very low accelerations without prohibitive expenditure of fuel. Studies are now being made to calibrate human beings for various intensities and duration of acceleration, and it seems certain that some suitable compromise can be devised between economy and safety.

The striking feature about space flight as it is seen today, as has been noted, is the necessity for very elaborate arrangements of orbits, bases, ferries, transfers and jettisons. The global economy cannot support this inefficiency for long. EHRIKKE is aware of this when he suggests the use of temporary orbits, that vehicles may be used again and again. Implicit in this complexity is the knowledge of how tenuous is the logistical base on which our efforts at space flight must depend. This is likely to produce a very definite feeling of uneasiness with which our earliest attempts must reckon. For the sake of economy, it may be possible to alleviate the problem by adjusting ferry rockets for high accelerations when carrying no passengers, and low accelerations when they do, or by having two different types of ships. The former would be very like guided missiles. The term "automatic supply" is believed to be the one proposed by EHRIKKE. As to the satellite vehicles, EHRIKKE feels that the first inhabited one will be a "single-body" installation circling the Earth at a small distance [90], and will be sustained by a number of these small high-efficiency supply ships. This high efficiency in supply is the key to reasonable satellite economy. He believes that the only permanent assignment of satellites, ultimately, will be observation. The human consideration here would be the important item of the rotation of personnel. H. PRESTON-THOMAS [91] visualizes the possibility, at a somewhat later stage of space flight, of using Deimos, one of the "natural" moons of Mars, as a base for prospecting operations on the planet itself. This is in connection with a deep-space flight system using ion propulsion and the physical substance of Deimos itself for fuel. Not mentioned was the possibility that Deimos or Phobos, because they are tiny, waterless, and airless, have not been subject to erosion. Inasmuch as the possibility exists [92] that they may be actually captured asteroids (and hence possess terrains which are jagged beyond all human experience on this planet Earth) they may be both dangerous to approach and treacherous to walk upon, if not actually subject to crumbling on contact [93].

Referring back to the eleven procedural steps involved in a completed interplanetary voyage, it is seen that over half of them have to do with the negotiation of orbits. RICHARDSON in an entertaining and amusing chapter entitled "Celestial Target Practice", from a recent book [94] gives a good deal of very interesting information about "velocity budgets", and elliptical and hyperbolic courses. The space station, however, receives little more than passing attention. By not emphasizing the extreme importance of the satellite concept one would have to admit that any voyage with planetary objectives would be an almost impossible undertaking.

Some general observations on the selection and problems of various orbits are perhaps in order. The choice of the "most desirable" orbit of course depends upon the use of the orbit, the economics involved, and the mechanics governing both orbits in general and the one to be selected. A generally equatorial orbit is first thought of because of the rotational assistance of the Earth, but VON BRAUN has further specified, for an orbit in which a deep-space vessel is to be constructed, an orbital plane "that coincides with the ecliptic on the anticipated day of departure" [95]. As way stations for long interplanetary flight, they would be established in circumsolar orbits midway between those of the planets themselves. In the very distant future, galactic (interstellar) travel might require that they assume orbits around the galactic center and participate in the rotation of the galaxy. Intergalactic flight is today utterly beyond human comprehension.

These various possibilities, unfortunately, are beset by a variety of potentially serious problems which are sure to tax the ingenuity of our best mathematicians. Any adverse influence on the lifetime of the satellite introduces at least some doubt about the feasibility of any given proposition. These adverse influences arise from the action of such agencies as the atmospheric and tidal friction for orbits relatively near a planet, gravitational forces occurring during the pursuit of orbits of different shapes, by shifts in the orientation of an orbit, and by perturbations from the local complex of celestial bodies.

LEY, commenting on some calculations of EUGEN SÄNGER, has come up with an interesting contention. A rocket weighing ten metric tons, he says, would, if placed in an orbit at 81 miles altitude, lose only six miles of altitude during the first revolution, seven during the second, and so on. At 112 miles, the loss is about half this, and, by the time you got up to 155 miles, the situation has so improved that you would lose only one per cent of your altitude in 100 000 000 revolutions [96]! A sharp, and rather startling, contradiction of this appears in a consideration of lifetime in view of tidal friction [97]. In these terms, a satellite vehicle orbiting at a 1,000 miles altitude would descend to Earth in about a month. While this view is not generally held, the development and acceptance of tidal theory should allow for an accurate determination of these tidal effects, and it is expected that more work along these lines will produce some interesting and useful results. The truth in the matter may well lie between these two extremes of optimism and pessimism, if such they be.

CLARKE has noted that there will be "some tendency of the (space) stations to drift slightly round their orbits" [98] and suggested that such deviations could be corrected by "occasional ejections of mass in the appropriate direction". BURGESS [99] observes that the oblateness of the Earth can affect satellite motion in two ways: "If the orbit is circular and in the equatorial plane, the displacement will be negligible, theoretically zero. An elliptical orbit in this plane would, however, undergo a rotation of the apsides (line of the major axis), so that concentric longitudes of the apogee and perigee would advance. In the case the orbits inclined to the plane of the equator there is not only this direct

motion of the apsides, but also a regression of the nodes of the orbit. The period of this regression can be calculated, and it is fairly short in the case of close orbits."

SPITZER [100] concludes that the perturbations caused by the Sun and Moon on an 800-kilometer orbit are "negligible". At the same time he shows that the oblateness of the Earth will cause considerably larger deviations in the orbit, and that a circumpolar orbit (not applicable here) will thus be distorted to a greater extent than an equatorial one. Not mentioned by SPITZER, but conceivably a factor, is the possibility that, in addition to its oblateness, the Earth may have a large bulge, dent, or other deviation from the classic form of the oblate spheroid. If there is such, or more than one of them, the fact has thus far escaped detection, perhaps partly by virtue of the limited accuracy of contemporary geodesy which lacks the services of a suitable satellite. If the effects of perturbation due to oblateness are not serious, the effect of these deviations will be even less, but in the computation of orbits with extremely long lifetimes, or of nominal permanency, they may be useful in regulating the precision of the satellite vehicle's motion.

There are also three types of motion which, although they do not derive from these external influences, may combine with them to produce a net apparent motion, as seen by the occupants of a station, which could be bewilderingly complex. These motions are wobble, nutation, and precession [71]. Applied to the popular VON BRAUNIAN wheel configuration, they are perhaps easiest to appreciate. Wobble may be compared to the motion of an eccentric phonograph record (misshapen hole) on the spinning turntable. Nutation compares with the motion of an automobile wheel, which when improperly mounted on the axle, produces a shuddering sensation in the vehicle known in America as "shimmy". Wobble would be produced by a circumferential maldistribution of cargo or passengers in the wheel-shaped station. Nutation would arise from the application of some force off the wheel's axis not in the plane of rotation. Precession is not an error of mechanical motion but rather the inevitable result of the fact that the station is permanently oriented in a given general direction, that there are 360 degrees in a circle and $365\frac{1}{4}$ days in the year. This small discrepancy would cause a gradual turning of the aim of the station's mirror away from the Sun and a consequent loss of solar power on which the operation of the station largely depended. Some of these motions and combinations of motion affect the operation of the station and some affect the lifetime that may be expected of a space station established in a given orbit. As they affect the efficiency of the space station they are legitimately an aspect of the development and use of such a device.

It is to be hoped that the interest of expert astronomers can be enlisted in ever greater numbers in the solution of these problems of celestial mechanics, for it is possible that the ultimate feasibility of the space station itself cannot do without some fairly imposing research in this direction. The spirit of scientific endeavor being what it is we may have reason to trust that the help we need will presently be forthcoming. Upon the efforts of our colleagues in that majestic and tranquil pursuit of astronomy may rest the success of all artificial satellites, satellite vehicles, space stations... and, finally, when that time comes, of space flight itself.

References

68. W. LEY, *Rockets, Missiles and Space Travel*, 2nd Ed. London: Chapman & Hall Ltd., 1951.
69. K. STEHLING, *Earth Scanning Techniques for Orbital Rocket Vehicles*. From: *Space-Flight Problems*. Biel-Bienne (Switzerland): Laubscher & Cie., 1955.

70. *Aviat. Week*, 18 April 1955.
71. *Across the Space Frontier*, edited by C. RYAN. New York: Viking Press, 1952.
72. *Aviat. Week*, 11 July 1955.
73. S. ALSOP, Prospects for Space Satellite. News commentary in *New York Herald Tribune*, 25 May 1955.
74. L. H. THOMAS, *Time Magazine*, May 3, 1954.
75. O. SCHACHTER, Legal Aspects of Space Travel. *J. Brit. Interplan. Soc.* **11**, 14 (1952).
76. A. MEYER, *Rechtliche Probleme des Weltraumflugs*. From: *Probleme aus der Astronautischen Grundlagenforschung*, ed. by H. H. KOELLE. Stuttgart, 1952.
77. C. E. S. HORSFORD, The Law of Space. *J. Brit. Interplan. Soc.* **14**, 144 (1955).
78. A. C. CLARKE, The Space Station for Television Relay. *Wireless World*, Oct. 1945.
79. On the Utility of an Artificial Unmanned Earth Satellite. *Jet Propulsion* **25**, 71 (1955).
80. J. R. PIERCE, Orbital Radio Relays. *Jet Propulsion* **25**, 153 (1955).
81. J. R. PIERCE, Interplanetary Communications. Lecture to the American Astronautical Society, 16 March 1955, New York; see *J. Astronautics* **2**, 75 (1955).
82. A. C. CLARKE, Stationary Orbits. *J. Brit. Astronom. Assoc.* **57**, 232 (1947); A. C. CLARKE, *Interplanetary Flight*. London: Temple Press Ltd., 1950.
83. W. VON BRAUN, *The Mars Project*. Urbana: University of Illinois Press, 1953.
84. G. O. SMITH, Radio Communication Across Space-Ship-to-Ship and Ship-to-Planet. *J. Brit. Interplan. Soc.* **12**, 13 (1953); *Proceedings of Second Symposium on Space Travel*, New York, 1952.
85. V. A. FIRSOFF, *Our Neighbour Worlds*. London: Hutchinson's Scientific and Technical Publications, 1952.
86. K. A. EHRLICHE, Establishment of Large Satellites by Means of Small Orbital Carriers. See Ref. [76], *Op. Cit.*
87. K. A. EHRLICHE, Analysis of Orbital Systems. From: *Bericht über den V. Internationalen Astronautischen Kongreß*, Innsbruck, 1954. Wien: Springer, 1955.
88. A. ANANOFF, *L'Astronautique*. Paris: Librairie Arthème Fayard, 1950. (See "les ilots célestes".)
89. Cited in "The Station in Space". *J. Amer. Rocket Soc.*, No. 63, 8 (1945).
90. K. A. EHRLICHE, A New Supply System for Satellite Orbits, Parts I and II. *Jet Propulsion* **24**, 302 (1954); **24**, 369 (1954).
91. H. PRESTON-THOMAS, Interorbital Transport Techniques. *J. Brit. Interplan. Soc.* **11**, 173 (1952).
92. F. KAHN, *Design of the Universe*. New York: Crown Publishers, Inc., 1954.
93. W. LEY, *The Conquest of Space*. New York: Viking Press, 1949. A speculative but carefully considered drawing of CHESLEY BONESTELL (Plate XXX) on page 126 gives an inkling of what we might be up against. A similar objection may be lodged against the use of two natural satellites recently rumored to have been discovered in low orbits about the earth.
94. R. S. RICHARDSON, *Exploring Mars*. New York: McGraw-Hill, 1954.
95. W. VON BRAUN, Logistic Aspects of Orbital Supply Systems. A paper delivered at the Ninth Annual American Rocket Society Convention, 1954.
96. See Ref. [68]; for further estimates of altitude losses, see *Laws of Motion in Space Travel*, *Interavia* **4**, 416 (1949).
97. J. LOGIE, The Effect of Tidal Friction on a Near Satellite. *J. Brit. Interplan. Soc.* **13**, 170 (1954).
98. A. C. CLARKE, *Interplanetary Flight*. London: Temple Press Ltd., 1950.
99. E. BURGESS, The Artificial Satellite. *The Engineer*, 12 October 1951.
100. L. SPITZER, Perturbations of a Satellite Orbit. *J. Brit. Interplan. Soc.* **9**, 131 (1950).

Satellite Librations¹

By

W. B. Klemperer², ARS, and R. M. Baker, Jr.², ARS

(With 4 Figures)

(Received February 28, 1956)

Abstract. When a satellite, such as the Moon, or a manmade artificial moon, circles the Earth in a closed orbit, it is in a state of equilibrium between gravity and centrifugal force. If the satellite is not perfectly round but oblong, then it also experiences some small degree of stability of poise, i.e. it tends to ride with its long axis vertical. If deflected from this position it would oscillate about this attitude somewhat like a pendulum; only while it can distinguish between vertical and horizontal, it cannot tell up from down, nor forward from aft on its orbit. The frequency of such oscillations about the equilibrium attitude, which are called "librations", can be computed from the shape and the orbital period of the satellite.

The present paper deals with such computations. It was interesting to determine whether or not it might be possible to utilize instruments responsive to these librations for satellite navigation purposes.

The shape most susceptible to the stabilizing effect is that of a dumbbell which consists of two masses separated by a rigid rod. A satellite built on this shape would have a libration period such that it performs $\sqrt{3} = 1.73$ complete swings during one tour of the orbit. (One such swing back and forth, would take 52 minutes for a satellite traveling around the Earth in 90 minutes.)

The Moon is known to be shaped like an ellipsoid, slightly oblong. Indeed it points its long axis towards the Earth, showing us always essentially the same face. It may have attained this position due to the stabilizing forces studied in this paper. The libration frequency of a prolate ellipsoid of revolution depends on its numerical eccentricity ϵ ; for a nearly round spheroid it is $\sqrt{3/2} \epsilon$ times the orbital frequency. A rough calculation of the frequency of the Moon's physical librations in its present shape places their periods at about 2 to 3 years. This movement is too slow to be readily observed, particularly because it is obscured by two other effects which cause apparent librations as large as 6 to 8°. One of these has a daily period caused by the rotation of the Earth; another has a monthly period caused by the Moon traveling on an elliptical orbit rather than on a circle, while rotating about a slightly inclined axis. However, astronomers agree that in the dim past, physical librations of the kind studied in this paper probably did exist but they were largely damped out by viscous lava tides.

Mathematical details of the libration calculations are given in two Appendices, viz. I for the dumbbell and II for the ellipsoid of revolution.

Zusammenfassung. Wenn ein Trabant, sei es der natürliche Mond oder ein künstlicher, die Erde in geschlossener Bahn umkreist, so befindet er sich in einem Zustande des Gleichgewichts zwischen Schwere und Zentrifugalkraft. Ist der Körper

¹ This paper was presented at the Seventh International Astronautical Congress in Rome in September 1956.

² Douglas Aircraft Company, Inc., Santa Monica, California, USA.

nicht genau rund, sondern länglich, so unterliegt er einer geringen Lagenstabilität: er hat die Tendenz, sich mit der langen Achse vertikal zu richten. Aus dieser Lage abgelenkt würde er Schwingungen ausführen nach Art eines Pendels, doch würde er wohl zwischen vertikal und horizontal unterscheiden können, nicht aber zwischen oben und unten, noch zwischen hinten und vorn auf seiner Bahn. Die Frequenz solcher Schwingungen, die "Librationen" genannt werden, kann aus der Form und der Umlaufsperiode des Trabanten berechnet werden.

Mit solchen Rechnungen befaßt sich die vorliegende Arbeit. Es erschien von Interesse, zu ermitteln, ob sich die Librationen mittels auf sie ansprechender Instrumente für Navigationszwecke ausnutzen lassen könnten.

Die für den stabilisierenden Einfluß der Kräfte empfänglichste Form ist die einer Hantel, die aus zwei durch eine Stange getrennten Massen besteht. Ein Trabant, der diese Form hätte, würde Librationsschwingungen ausführen, die $\sqrt{3} = 1,73$ mal schneller verlaufen als der Umlauf. (Jede volle Hin- und Rückschwingung zusammen würde 52 Minuten dauern für einen niedrigen kreisenden Satelliten, der die Erde in etwa 90 Minuten umkreist.)

Unser natürlicher Mond ist bekanntlich ein schwach längliches Ellipsoid. Seine lange Achse ist tatsächlich gegen die Erde gerichtet und wir sehen im wesentlichen immer dieselbe Seite des Mondes. Diese Lage hat sich vermutlich infolge der hier betrachteten stabilisierenden Wirkungen eingestellt. Die Librationsfrequenz eines Rotationsellipsoids mit einer geringen Exzentrizität ε ist $\sqrt{3/2} \varepsilon$ mal der Umlauffrequenz. Bei der geringen Elliptizität des Mondes sollten seine physischen Librationsperioden etwa 2 bis 3 Jahre betragen: zu langsam, um leicht beobachtet zu werden, zumal sie durch zwei andere Einflüsse verdeckt werden, die scheinbare Librationen von 6 bis 8° Amplitude verursachen. Diese haben eine tägliche Komponente wegen der Erddrehung und eine monatliche, weil der Mond eine erheblich elliptische, geneigte Bahn um die Erde beschreibt. Trotzdem ist es wahrscheinlich, daß physische Librationen der beschriebenen Art in geologischer Vorzeit existierten und allmählich infolge zäher Lavagezeiten abgeklungen sind.

Die mathematischen Einzelheiten sind in zwei Anhängen enthalten, einem für die Hantelform, dem anderen für das Rotationsellipsoid.

Résumé. Un satellite réel ou artificiel est en équilibre sous l'action de la force d'attraction et de la force centrifuge. S'il n'est pas parfaitement sphérique mais oblong, il aura une certaine stabilité d'orientation qui le fait se mouvoir avec son grand axe suivant la verticale. Tout écart à cette position d'équilibre entraîne des oscillations pendulaires; si le satellite peut distinguer la verticale de l'horizontale il ne peut cependant lever l'indétermination entre haut et bas et avant et arrière. La fréquence des mouvements pendulaires ou "librations" est calculable à partir de la forme du satellite et de sa période orbitale. Ce calcul forme l'objet de l'article. Il était intéressant d'examiner la possibilité d'utiliser des instruments sensibles aux librations pour les besoins de la navigation des satellites artificiels.

La forme la plus stable est le double battant de cloche constitué par deux masses séparées par une tige rigide. Un satellite de cette forme aurait une période de libration de $\sqrt{3} = 1,73$ fois plus vite que la période orbitale (52 minutes pour une période orbitale de 90 minutes).

On sait que la lune est un ellipsoïde dont le grand axe est aligné vers la terre. Elle montre donc toujours la même face. Il se peut qu'elle ait atteint cette position à la suite de l'action de forces stabilisatrices étudiées dans l'article. La fréquence de libration physique d'un ellipsoïde de révolution allongé dépend de la valeur numérique de son excentricité ε ; quand il est quasi-sphérique elle vaut $\varepsilon\sqrt{3/2}$ fois la fréquence orbitale. Une estimation grossière de la fréquence des librations physiques de la lune dans sa forme actuelle conduit à des périodes de 2 à 3 années. Ce mouvement est trop lent pour être facilement observable d'autant plus qu'il est caché par deux autres phénomènes qui provoquent des librations importantes de 6 à 8 degrés d'amplitude. Une de ces librations a une période journalière provoquée par la rotation de la terre; l'autre

une période mensuelle due à l'ellipticité de l'orbite de la lune qui est d'abord inclinée vers l'axe terrestre. Il est cependant probable que la forme de libration physique étudiée dans cet article a probablement dû exister pendant une époque préhistorique mais aura été rapidement amortie par dissipation dans des marées de laves.

Les détails mathématiques des calculs de libration sont donnés en Appendices: I pour le double battant de cloche, II pour l'ellipsoïde de révolution.

The intriguing question has been raised whether it should be possible on board a Satellite vehicle to determine anything significant for orientation purposes by means of passive "ponderometric" instruments, such as accelerometers, pendulums, balances, seismometers or the like. That such might not be impossible might have been inferred from the observation that the Moon has been known for centuries to show essentially the same face to the inhabitants of the Earth (except for small oscillations called „librations"). Would this not be a grotesque coincidence if there had not been a stabilizing force at work? If the Moon were a perfectly balanced solid homogeneous sphere, it would be difficult to comprehend how a directive force could be exerted on any part of it by the Earth. What, however, if the Moon is not symmetrically homogeneous or not a sphere, be the departure ever so small?

Since by all experience and according to EINSTEIN's postulate, the effects of gravity and of inertia on any one solid mass point are inseparable, one cannot hope to demonstrate anything determinable about the configuration of the external universe by internal passive means alone from a vehicle treated as a mass point. Only by considering the distribution of masses on board the vehicle without neglecting its dimensions completely against the orbital dimensions can one introduce what may be called ponderometric technique and look for effects that might betray the presence of one or more focal gravitational centers.

Obviously, such effects should become conspicuous on a satellite composed of two massive bodies some appreciable distance apart connected to each other in what can be described as a dumbbell configuration¹.

Let us assume for instance a satellite was built in the shape of an idealized dumbbell, traveling around the Earth in a circular orbit of mean radius r at an angular velocity of revolution Ω in equilibrium with gravitational attraction. The dumbbell shall consist of the spheres M_1 and M_2 of equal mass m separated by a rigid but weightless rod of length $2e$. Let us further assume that at the time t the rod makes an angle ϕ with the "vertical", i.e., with the radius r between the center of gravity of the dumbbell system and the center of the Earth (Fig. 1). Now due to their different distances from the geocenter, the two spheres suffer different attractions, viz:

$$G_1 = m g R^2/r_1^2 \quad \text{and} \quad G_2 = m g R^2/r_2^2 \quad (1)$$

where R is the radius of the Earth surface and g the gravitational acceleration there. The respective leverages a_1 and a_2 of these attraction forces are $a_1 = (r e \sin \phi)/r_1$ and $a_2 = (r e \sin \phi)/r_2$ as can be readily seen from figure 1 when expressing the sines of the central angles subtended by the excursion of the two masses as well as by the leverages of the forces. Hence, the net torque due to the different attraction forces is

$$T = m g R^2 r e \sin \phi (1/r_1^3 - 1/r_2^3). \quad (2)$$

¹ To be sure, such a configuration cannot be reduced to a gravitationally equivalent mass point (monopole), and in this sense its motion in the Earth's field does not strictly belong into the domain of the two-body problem. However, with the distance between two elementary masses fixed, the computation does not entail the difficulties of the general three-body problem.

The two masses are also subject to different centrifugal forces directly proportional to their respective radii, viz: $C_1 = m \Omega^2 r_1$ and $C_2 = m \Omega^2 r_2$ but, since their leverages are inversely proportional to their respective radii, their moments balance and they contribute no net torque.

So long as the dimensions (e) are very small compared to the orbit radius r , the individual radii can be approximated by $r_1 = r - e \cos \phi$ and $r_2 = r + e \cos \phi$. Introducing these into eq. (2) and expanding the reciprocal cubes into a series of power terms of the relative departure of r_1 or r_2 from r , the torque equation becomes

$$T = -6 (R^2/r^3) m e^2 \sin \phi \cos \phi. \quad (3)$$

Now, if the dumbbell is allowed to swing in response to this torque, the result will be

$$T = 2 m e^2 \ddot{\phi} \quad (4)$$

where $2 m e^2$ is the moment of inertia of the dumbbell (if the dimensions of each mass are small compared to e), and $\ddot{\phi}$ is its resultant angular acceleration. Now cancelling by $2 m e^2$ and considering that in the equilibrium case $\phi = 90^\circ$ where both masses travel at the same radius and gravitational attraction balances centrifugal force exactly, viz:

$$g R^2/r^2 = \Omega^2 r \quad (5)$$

the equation of the pendulum motion can be written as

$$\ddot{\phi} = -3 \Omega^2 \sin \phi \cos \phi = -\frac{3}{2} \Omega^2 \sin 2\phi. \quad (6)$$

This law can be readily interpreted. In the vicinity of the radial (vertical) orientation where $\phi = 0^\circ$ or 180° , the configuration has stability; it tends to oscillate about this condition when (mildly) disturbed. In the "horizontal" orientation, $\phi = 90^\circ$ or 270° ; the forces are in balance but this equilibrium is unstable. At $\phi = \pm 45^\circ$ the erecting moment is maximum, causing the maximal angular acceleration $\ddot{\phi} = \pm 3/2 \Omega^2$.

Eq. (6) can be integrated by considering that $\ddot{\phi} = d\dot{\phi}/dt = \dot{\phi} \cdot d\dot{\phi}/d\phi = d(\dot{\phi}^2/2)/d\phi$. The result can be expressed in the form

$$t = \frac{\sqrt{1/3}}{\Omega} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_2 - \sin^2 \phi}} \quad (7)$$

where ϕ_0 is the amplitude and t is counted from $\phi = 0$, as derived in some detail in Appendix I. Expression (7) is an elliptic integral which may be evaluated from appropriate tables over any desired range.

For very small excursion ϕ_0 , of course, $\sin \phi$ can be replaced by ϕ and $\cos \phi$ by 1; thus eq. (6) reduces itself to the undamped oscillation equation

$$\ddot{\phi} = -3 \Omega^2 \phi. \quad (8)$$

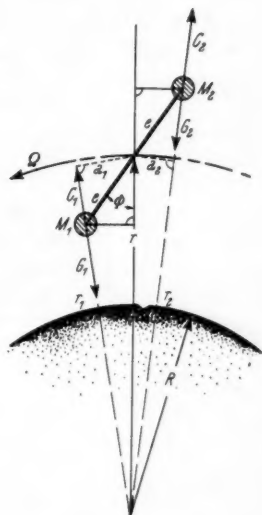


Fig. 1

Under this condition the dumbbell behaves essentially like an undamped pendulum having a frequency

$$\omega = \Omega \sqrt{3}. \quad (9)$$

In other words, it makes $\sqrt{3} = 1.732$ complete cycle swings during the period of one orbit. This is very slow indeed and would no doubt be extremely difficult to detect, measure or average. For large excursions approaching 90° , the period becomes even longer. To be sure, if the orbit were not precisely circular, but appreciably elliptic, the situation would become more complex¹.

One might think of putting ultrasensitive strain gauges on the structure connecting the two dumbbell masses. Such instruments should register zero when the dumbbell is in horizontal attitude, and some average tension when in vertical attitude. Should the vehicle turn end over end, this would cause an average tension fluctuating at twice the tumbling rate. However, no such instrument could distinguish up from down or East from West. The strain fluctuation would, of course, be minute and readily obscured by any movement of personnel or loads aboard the vehicle.

All these considerations would seem to discourage any hope of readily exploiting the dumbbell pendulum effect for orientation purposes aboard a satellite vehicle by building the vehicle in the shape of a dumbbell. However, one might think of installing some sort of gravity balance of long pendulum length aboard and of detecting some minute effects by microscopic observation. As a hypothetical example one might consider what would happen if two massive objects were released freely floating within a satellite cabin, may be inside an evacuated vessel. Would they remain in the same relative position during a (circular) orbit? Obviously, the answer must be "yes" if the objects had been at the same "level" with respect to the orbit center when they were released without giving them any impulse from the satellite vehicle. However, if the two objects were released while one was "above" the other, they would gradually fall away from each other beginning at relative accelerations of approximately $\pm \ddot{z} = 3\Omega^2 e$, because m times that was the force that held them together before they were released². Hence, in a fraction n of the period $T = 2\pi/\Omega$ of one orbit (say $T = 90$ min) they would have separated by $3\Omega^2 e T^2 n^2 = 12\pi^2 n^2 e$. This should be detectable. For instance, the distance should almost have doubled after $n = 1/\pi \sqrt{6} = 13\%$ of the orbit period, say less than 12 minutes or a little over 45° of a circle. In the course of an entire cycle, the free floating objects would really describe two slightly different orbital ellipses, reach a maximum vertical separation at the antipode point and then return to the same level also leading and lagging with respect to each other because of their different orbit periods. By releasing more than two objects in either a triangular or a tetrahedral constellation, the direction of gravity might theoretically be determined, but again up and down cannot be distinguished nor forward and aft. How to release the floating masses without imparting to them ever so small an impulse will pose an exceedingly difficult mechanical task, even if they be submersed in a

¹ As a matter of fact, the Sun and the Moon also exert tidal types of influences. The gravitational field strengths of Sun and Moon are of the order of $1/1500$ and $1/30\,000$ of that of the Earth at the orbit of an artificial satellite. Hence the forced oscillation due to these bodies should be very weak and imperceptible. The same is true of the Earth's asphericity.

² It will be noted that one third of this force, namely $\Omega^2 e$ is simply accounted for by the centrifugal force of the two masses rotating about their common center as they participate in the orbit motion of the satellite and its own moonlike rotation.

lighter or heavier liquid in front of a microscope. Also, the problem of accounting for orbital ellipticity, any hyperlunar rotation or any oscillation of the cabin at the instant of release, which can readily produce centrifugal forces of comparable or even greater magnitude, remains a "rub". How to sense the direction to the nearest gravitational center remains a very elusive problem.

Nevertheless, it is quite plausible, as astronomers infer, that some pendulum effect has played a role in stabilizing the Moon in a configuration where it points a major axis towards the Earth, assuming that viscous lava tides were at work long ago to slow the movement down to very small oscillations which may still persist. Of course, the Moon is not shaped like a dumbbell but known to be more like a triaxial ellipsoid indeed pointing toward the Earth. To compute its oscillation one would have to replace $2 m e^2$ on the left side of eq. (4) by the true moment of inertia, which would be of the order of $0.4 M r^2$ where M is the Moon's mass, $\sqrt{0.4} r$ its effective radius of gyration i and on the right side one would have to integrate over the Moon's volume with due regard to the appropriate angle of each particle off the major axis. One could still consider the symmetrical body as made up of a multitude of elementary dumbbells but the values replacing $2 m e^2$ are no longer the same on both sides of the equation. Hence the numerical factor in eq. (6) becomes less than 3, when e is commensurable or small compared to the dimensions of the body and it tends to diminish with e/i so that the period of the oscillation becomes the longer, the closer the ellipsoid resembles a sphere.

The problem of determining the oscillation period precisely for a massive nearly spherical prolate ellipsoid of revolution (prolate spheroid) is solved in Appendix II. As developed there, the plane libration oscillation is an undamped harmonic oscillation whose frequency, so long as the amplitude is small, is

$$\omega = \Omega \sqrt{3 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} = \Omega \sqrt{\frac{3 \varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2}} \quad (20)$$

where a is the long semi-axis (the figure axis), and b is the shorter semi-axis of the ellipse, or ε is the numerical eccentricity.

For small eccentricity where $\varepsilon \ll 1$ (and ipso facto $\varepsilon \ll \sqrt{2}$), i.e., for a nearly spherical ellipsoid, the frequency is close to

$$\omega = \sqrt{3/2} \varepsilon \Omega. \quad (20 a)$$

This compares with $\sqrt{3} \Omega$ of the dumbbell [eq. (9)] but for the factor $\varepsilon/\sqrt{2}$ which illustrates how the oscillation becomes slower as the eccentricity decreases, so as to degenerate into complete loss of any restoring moment for the homogeneous sphere itself.

The actual oscillation of a non-spherical body revolving in equilibrium in a circular orbit need not lie in the plane of revolution. There may be a component in the elevation plane normal to the orbit as well. The two components may have different amplitudes and any phase difference at some instant. For a satellite having the shape of a body of revolution, the frequency of any two components would be the same and their phase relationship would persevere.

For a tri-axial ellipsoid, however, the above calculations are not precisely applicable, even if the departure of the shape from a spheroid is small, as is the case of the Moon. Here the two frequencies are not quite the same and the motion may run through a gamut of LISSAJOUS figures described by its axial poles. While a precise integration would have to take the ellipticity in the θ azimuth sense into account — and the procedure is obvious — a reasonably good approximation of the libratory frequencies of the Moon may be expected from its treatment as a prolate ellipsoid of revolution either inscribed or circumscribed to it.

According to Ref. [4], p. 170, the Moon has a major diameter of $2a = 2161$ miles and its polar ($2b$) and equatorial ($2c$) transverse diameters are 1.35 and .45 miles shorter. This makes the eccentricities

$$e_b = \sqrt{2(a-b)/a} = 0.0354 \quad \text{in the polar plane and}$$

$$e_c = \sqrt{2(a-c)/a} = 0.0202 \quad \text{in the equatorial plane.}$$

Hence, with $\sqrt{3/2} = 1.225$: the frequency and periods are

$$\omega_b = \Omega/23, \quad T_b = 23 \text{ lunar months}$$

$$\omega_c = \Omega/40, \quad T_c = 40 \text{ lunar months.}$$

The real frequencies of the Moon's oscillation should be bracketed between these extremes; at any rate the periods would be of the order of 2 to 3 years. This would be too slow for easy detection. In reality any oscillation of the type here considered would be rather obscured by other perturbations of greater magnitude and higher frequencies. Most important of these is the one caused by the fact that the Moon does not travel on a circular orbit at constant speed around the Earth but it describes a noticeably elliptical orbit on which its circumferential speed varies according to KEPLER's law of areas. This introduces a forcing function whose period is one lunar month; it produces geometrical amplitudes of several degrees.

What the terrestrial astronomer can observe of the apparent librations of the Moon is usually divided into "geometrical" and "physical" phenomena. The well-known geometrical librations arise from the geometry of the Moon-Geocenter-Observer constellation, without involving any pendulum dynamics, Ref. [1], p. 123, and [2], p. 255:

"1. A libration in latitude results from the inclination of about $6\frac{1}{2}^\circ$ between the Moon's equator and the plane of its orbit. At intervals of two weeks the lunar poles are tipped alternating toward and away from us; at times we can see $6\frac{1}{2}^\circ$ beyond the north pole, at other times the same distance beyond the south pole.

"2. Librations in longitude are brought about by the failure of the Moon's rotation and revolution to keep exactly in step throughout the month, although they average out together at the end. The Moon's rotation, like the Earth's, proceeds at a very nearly uniform rate; but the revolution is not uniform, because the moon's orbit is an ellipse and the orbital velocity varies between a minimum at the apogee and a maximum at the perigee which two radii vectors differ by as much as 13%. Thus the Moon seems to rock in an east and west direction, allowing us to see as much as $7\frac{3}{4}^\circ$ farther around in longitude at each limb than we could otherwise.

"3. A diurnal (parallactic) libration is produced by the Earth's rotation. Even if the other librations were absent, so that the same hemisphere were turned always toward the Earth's center, an observer stationed somewhere on the surface of the Earth would still view the Moon from slightly different directions during the course of the day and night, and therefore see slightly different hemispheres. From his elevated position nearly 4000 miles above the center of the Earth, the observer can see at most one degree farther over the western edge at moonrise, and the same amount over the eastern edge at moonset."

Superimposed upon these apparent geometrical variations there should be a real physical libration of pendulous character like the one studied before, but its orbital forcing frequency of a period of one lunar month is so much faster than its natural response frequency of several years that the reaction of the Moon

to it must be largely suppressed in the manner of the sluggishness of a torsional seismometer mass, which hardly follows the urge of its very weak spring system.

It may be in order to recall that when we set out to explore what manifestations of a predominant gravitational field center can be demonstrated merely by ponderometric devices on board a satellite traveling in a circular orbit around a central body we were, in a way, begging the question, because the knowledge of the orbit being circular would already constitute some "extraneous" information presumably acquired by other than ponderometric means. This observation prompts one to pose the more general query: What manifestations of the external gravity field can possibly be observed by ponderometric devices on board a satellite traveling on an orbit whose parameters with respect to the astral body or bodies in its vicinity are not precisely known? It would seem that this query is closely related to the question of how can tidal observations be interpreted in terms of influences on Earth arising from the attractions of the Sun and the Moon and how could the presence and relative motion of these three bodies be inferred from tidal or seismic observations if these motions were not already otherwise known. It is clear that such observations, even if they were made by means of instruments arranged in a more systematic configuration than the accidental distribution of the oceans on the Earth, would in general disclose a complex spectrum of oscillations of stress or strain. Upon analysis, their persistent frequency components might be correlated to hypothetical forcing functions, but it is not obvious how the natural frequencies of a pendulous libration can be distinguished from an orbital influence. The latter (tidal) phenomena will have twice the frequency of the orbital revolution ($\nu = 2\Omega$) independently of the instrument configuration; on the other hand the frequency of a pendulous libration would depend on the instrumental configuration as well. It could be made quite commensurable with the orbital frequency and it is easy to slow it down to any desired degree. Curiously enough a synchronism of pendulous libration with orbital motion could be maintained by a satellite body so constructed that its dynamic behavior would be equivalent to that of a homogeneous massive ellipsoid of revolution of slenderness $a : b = \sqrt{2}$, because for this shape $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2) = 1/3$ so that, according to eq. (20) of Appendix II, $\omega = \Omega$. On the other hand, there seems to be no way of producing a pendulous libration faster than $\sqrt{3}\Omega$ which is the extreme case of the dumbbell. Installation of several instruments of different configurations and frequencies, notably harmonics, may make it possible to apply damping between them; when they eventually attain parallelism, they should point to the gravity center, but at best it would take many orbital periods to approach this condition. Therefore, even this scheme is up against serious limitations.

Appendix I

Integration of Equation of Dumbbell Oscillation

The detailed steps in integrating eq. (6) are as follows

$$\ddot{\phi} = -\frac{3}{2}\Omega^2 \sin 2\phi$$

$$\ddot{\phi} = d\dot{\phi}/dt = \dot{\phi} \cdot d\dot{\phi}/d\phi = d(\dot{\phi}^2/2)/d\phi. \quad (6)$$

Hence

$$\begin{aligned}
 d(\dot{\phi}^2/2) &= -\frac{3}{4}\Omega^2 \sin 2\phi \, d2\phi \\
 \frac{\dot{\phi}^2}{2} &= \frac{3}{4}\Omega^2 \cos 2\phi + C \\
 0 &= \frac{3}{4}\Omega^2 \cos 2\phi_0 + C \quad \text{where } \phi_0 \text{ is the amplitude.} \\
 \dot{\phi}^2 &= \frac{3}{2}\Omega^2 (\cos 2\phi - \cos 2\phi_0) \\
 d\phi/dt = \dot{\phi} &= \Omega \sqrt{\frac{3}{2}(\cos 2\phi - \cos 2\phi_0)} \\
 dt &= \frac{\sqrt{2/3} \, d\phi}{\Omega \sqrt{\cos 2\phi - \cos 2\phi_0}} \\
 t &= \frac{\sqrt{2/3}}{\Omega} \cdot \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi - \cos 2\phi_0}} \quad \text{or} \\
 t &= \frac{\sqrt{1/3}}{\Omega} \cdot \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \quad (7)
 \end{aligned}$$

counting t from the position of symmetry, $\phi = 0$.

Appendix II

Plane Libration of a Prolate Spheroid

A satellite in the form of a massive prolate ellipsoid of revolution is assumed to revolve in a steady circular orbit around the Earth. It rotates so as to show the same pole of its major axis to the Earth, except for a small angular oscillation (libration) superimposed to this rotation.

Let a Cartesian coordinate system uvw be defined as having its origin in the mass center of the satellite, its w axis coincident with the radius vector from the Earth center, while the v and u axes are in and normal to the plane in which an oscillation of the long figure axis (a) of the spheroid against the radius vector axis w lies. (This plane may be conceived as coincident with the plane of the orbit, but the solution is not confined to this restriction.) At the instant t the angular excursion between a and w shall be denoted by ϕ . In order to break down the mass of the spheroid into infinitesimal particles it is convenient also to introduce a cylindrical coordinate system X, y, θ , solidly and symmetrically anchored in the ellipsoid, where X is the axial coordinate, y the radius in the body of revolution which assumes the value Y at the surface, and θ in the azimuth angle counted from the u direction, as illustrated in Fig. 2.

An increment of mass in the prolate spheroid having a density ρ is:

$$dm = \rho \, y \, d\theta \, dy \, dX.$$

The distance of this increment above (or below) the uv -plane is

$$w = X \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi,$$

cf. Fig. 3.

For very small ϕ this is, with close approximation

$$w = X + (y \sin \theta) \phi.$$

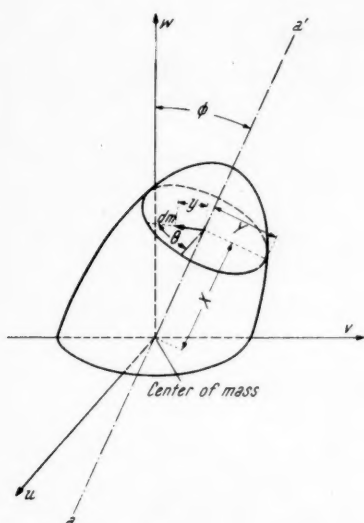


Fig. 2

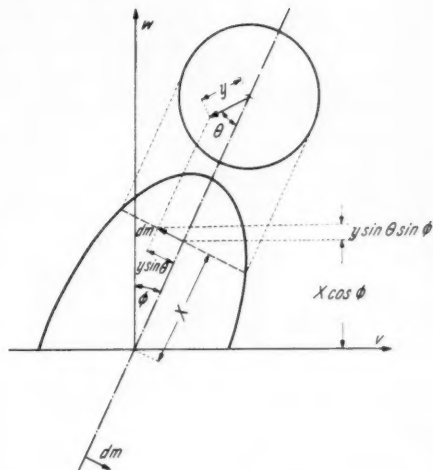


Fig. 3

Since the prolate spheroid is symmetrical about the vw plane, it suffices to consider the moment of $2 dm$ integrated from $\theta = -\pi/2$ to $+\pi/2$, and acting on the arm l which is the distance from the projection of the increment dm on the vw plane to the center of mass, cf. Fig. 4. If dF be the incremental force acting on $2 dm$ and α be the angle of l with respect to the v axis then the incremental moment $= l dF \cos \alpha$ where the leverage is, as readily gleaned from Fig. 4:

$$l \cos \alpha = X \sin \phi - y \sin \theta \cos \phi \quad (10)$$

which for small ϕ is approximately

$$\cos \alpha \cong X \phi - y \sin \theta. \quad (10a)$$

Analogous to eq. (2) the incremental torque due to the gravitational attraction on each antisymmetrical pair of increments of mass above and below the uv plane as per (10) (situated symmetrically with respect to the center of mass of the spheroid) is

$$dT = 2 dm g R^2 r l \cos \alpha (1/r_1^3 - 1/r_2^3) \quad (11)$$

where
and

$$\begin{aligned} r_1 &= r [1 - (l/r) \sin \alpha] \\ r_2 &= r [1 + (l/r) \sin \alpha]. \end{aligned} \quad (12)$$

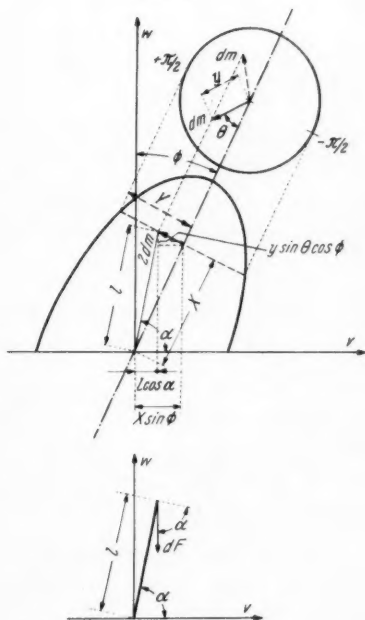


Fig. 4

Approximating

$$1/r_1^3 = (1/r^3) [1 + (3/r) l \sin \alpha] \quad (13)$$

and

$$1/r_2^3 = (1/r^3) [1 - (3/r) l \sin \alpha].$$

Noting that for the circular orbit $gR^2/r^3 = \Omega^2$, the incremental restoring moment caused by the anti-symmetrical pair of symmetrical $2 dm$ acting on the leverage (10) now reads:

$$dT = -2 dm \Omega^2 \cdot 6 (X \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi) \cdot (X \sin \phi - y \sin \theta \cos \phi) \quad (14)$$

and for small ϕ :

$$\begin{aligned} dT &\cong -12 dm \Omega^2 (X + y \phi \sin \phi) \cdot (X \phi - y \sin \theta) \\ &= -12 dm \Omega^2 (X^2 \phi - X y \sin \theta - y^2 \phi \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (14 a)$$

The torque equation becomes:

$$I \ddot{\phi} = -12 \Omega^2 \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^y dX y (X^2 \phi - X y \sin \theta - y^2 \phi \sin^2 \theta).$$

Integrating θ from $-\pi/2$ to $\pi/2$, $\sin \theta$ drops out and

$$\begin{aligned} I \ddot{\phi} &= -12 \Omega^2 \rho \pi \phi \int_0^a dX \int_0^y y dy (X^2 - y^2/2) \\ I \ddot{\phi} &= -6 \Omega^2 \rho \pi \phi \int_0^a (Y^2 X^2 - Y^2/4) dX. \end{aligned} \quad (14 b)$$

For the generatrix ellipse $Y^2/b^2 + X^2/a^2 = 1$ where a and b are the semi-major and semi-minor axes. Therefore:

$$Y^2 = b^2 - (b/a)^2 X^2. \quad (15)$$

This transforms the integral of eq. (14 b) into

$$\begin{aligned} &-(b^2/4) \cdot \int_0^a dX + (b^2 + b^4/2 a^2) \cdot \int_0^a X^2 dX - (b^2/a^2 + b^4/4 a^2) \cdot \int_0^a X^4 dX = \\ &= \frac{2}{15} a b^2 (a^2 - b^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Thus:

$$I \ddot{\phi} = -\Omega^2 \pi \rho \frac{4}{5} a b^2 (a^2 - b^2) \phi. \quad (17)$$

The moment of inertia of the prolate spheroid about the u -axis is

$$I = \left(\frac{4}{15} \pi \rho a b^2 \right) (a^2 + b^2). \quad (18)$$

Thus the frequency of the simple harmonic motion is defined by

$$\omega^2 = \frac{(4/5) \pi \rho a b^2 (a^2 - b^2)}{(4/15) \pi \rho a b^2 (a^2 + b^2)} \Omega^2.$$

It is

$$\omega = \Omega \sqrt{3 \frac{(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)}} \quad (19)$$

which is less than the frequency of the dumbbell by the fraction

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}.$$

Introducing the numerical eccentricity ε of the ellipse by the notation:

$$\varepsilon^2 \triangleq \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

The frequency ω becomes

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{3 \varepsilon^2}{(2 - \varepsilon^2)}}. \quad (20)$$

For small eccentricities this is

$$\omega \cong \sqrt{3/2} \varepsilon \Omega \quad (20 \text{ a})$$

slower than the dumbbell frequency in proportion to the fraction $\varepsilon/\sqrt{2}$.

References

1. R. H. BAKER, *Astronomy*. Fourth Edition. New York: D. van Nostrand Co., 1945.
2. C. A. YOUNG, *General Astronomy*. New York: Ginn and Company, 1888.
3. J. C. DUNCAN, *Astronomy*. Fourth Edition. New York: Harper and Brothers, 1945.
4. H. N. RUSSELL, R. S. DUGAN, and J. Q. STEWART, *Astronomy*, Vol. 1. New York: Ginn and Company, 1926.

Über Systeme mit chemisch reagierenden Komponenten im Gleichgewicht

I. Die Berechnung der Gemischzusammensetzung¹

Von

H. J. Kaeppler und G. Baumann², GfW

(Eingegangen am 14. April 1956)

Zusammenfassung. Auf Grund statistischer Betrachtungen über chemische Reaktionen im Gleichgewicht werden die Ableitung der Gleichgewichtskonstanten für solche Reaktionen im isotherm-isochoren und isotherm-isobaren Fall sowie Beziehungen zu deren Berechnung aus tabulierten Werten der thermodynamischen Funktionen von Einzelgasen dargestellt.

Die Betrachtungen über einzelne chemische Reaktionen werden dann auf beliebige Systeme mit chemischen Reaktionen im Gleichgewicht verallgemeinert. Ein Gleichungssystem für eine beliebige Zahl von Komponenten und für beliebig viele chemische Reaktionen wird abgeleitet sowie ein allgemeines Lösungsverfahren für dieses System angegeben. Die Anwendung des vorgelegten Verfahrens ist an Hand von Beispielen aufgezeigt.

Dieses verallgemeinerte Verfahren läßt sich sofort auf beliebige konkrete Fälle chemischer Reaktionen anwenden und ist vor allem für komplizierte Systeme geeignet. Die Eignung des Verfahrens sowie die Konvergenzverhältnisse bei der Lösung wurden an Hand von Rechnungen mit Hilfe elektronischer Rechanlagen und mit Handrechenmaschinen erprobt.

Abstract. Based on statistical considerations on chemical reactions in equilibrium, the derivation of the equilibrium constants for such reactions in the isothermal-isochoric and isothermal-isobaric cases, as well as relations for their calculation from tabulated values of thermodynamic functions of individual gases, are presented.

The considerations on individual chemical reactions are then generalized for arbitrary systems with chemical reactions in equilibrium. A system of equations for an arbitrary number of components and for an arbitrary number of chemical reactions is derived, and a generalized method of solution for this system is given. The application of the presented method is elaborated with the aid of examples.

This generalized method can immediately be applied to concrete cases of chemical reactions and is particularly suited for complicated systems. The applicability of the method, as well as the convergence behavior of the solution, was tested with the aid of computations using electronic equipment as well as ordinary desk computers.

Résumé. L'article présente le calcul des constantes d'équilibre des réactions chimiques isotherme-isochores et isotherme-isobares et les relations nécessaires pour l'utilisation des tables des fonctions thermodynamiques des gaz constituants. Les considérations statistiques sur l'équilibre des réactions chimiques individuelles sont

¹ Vorgetragen beim VII. Internationalen Astronautischen Kongreß in Rom, September 1956.

² Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, Stuttgart-Flughafen, Bundesrepublik Deutschland.

alors étendues aux systèmes d'une complexité arbitraire, et une méthode générale de solution est présentée et illustrée par des exemples.

Cette méthode générale est d'application directe aux cas concrets et particulièrement avantageuse pour les systèmes complexes.

La convergence de la solution a été éprouvée à l'aide de calculs numériques sur machines électroniques et machines de bureau.

Die Behandlung von Systemen mit chemisch reagierenden Komponenten im Gleichgewicht erfolgt wie bekannt mit Hilfe zweier Typen von Gleichungen, nämlich der Gleichungen für die Einzelreaktionen und der Atombilanzgleichungen. Die Reaktionsgleichungen geben die Umwandlungen zwischen den einzelnen Komponenten des Systems an, die Atombilanzgleichungen stellen eine Verbindung zwischen diesen einzelnen Reaktionsgleichungen her. Die Aufstellung solcher Gleichungen ist keinerlei Schwierigkeiten unterworfen und kann sofort durchgeführt werden, wenn die einzelnen Komponenten des Systems, zumindest aber die Ausgangskomponenten bekannt sind. Während die Atombilanzgleichungen linear sind, handelt es sich bei den Reaktionsgleichungen um nicht-lineare Gebilde, so daß hier im Gesamten ein simultanes System nichtlinearer algebraischer Gleichungen vorliegt, das nun gelöst werden soll. Diese Lösung ist nicht immer einfach. Sie kann sogar mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sein, wenn eine sehr große Zahl von Komponenten verschiedenster Art vorhanden ist. Gerade wegen dieser Schwierigkeiten ist es von Interesse, ein Lösungsverfahren zu haben, das allgemein verwendbar ist, das heißt ohne weitere Überlegungen sofort auf den speziellen Fall angewendet werden kann. Gleichzeitig ist es wünschenswert, daß dieses Verfahren in einer Schreibweise vorliegt, deren Anwendung keine speziellen Kenntnisse der Chemie voraussetzt.

Es dürfte somit interessant sein, zu untersuchen, ob die Erfassung solcher Gleichungssysteme in allgemeiner Form möglich ist, derart, daß aus einem solchen verallgemeinerten System unmittelbar jeder Spezialfall hergeleitet werden kann. Dabei soll eine solche Spezialisierung sofort auf ein Gleichungssystem mit geeigneten Variablen in einer für praktische Rechnung geeigneten Form führen. Das Verfahren soll dann für elektronische Rechengeräte und für manuelle Rechnung gleich geeignet sein. Der Vorteil einer solchen allgemeinen analytischen Theorie dürfte auch darin liegen, daß gewisse allgemeine Aussagen über chemisch reagierende Systeme möglich sind, die man zumeist bei Spezialfällen nicht ohne weiteres erkennen kann. Außerdem wird damit das empirische Vorgehen, das im allgemeinen eine eingehende Kenntnis der Materie voraussetzt, durch eine analytische Methode abgelöst.

Bisher erfolgte die Berechnung von Systemen mit chemisch reagierenden Komponenten zumeist auf empirischer Basis für ganz spezielle Ausgangszusammensetzungen der Gemische. Es wurden zunächst die thermodynamischen Reaktionsgleichungen aufgestellt sowie die Atombilanzgleichungen angegeben. Die zusätzliche Bedingung, daß die Summe aller Partialdrucke gleich dem Gesamtdruck ist, bzw. daß die Summe aller Konzentrationen gleich Eins ist, führte dann insgesamt auf die erforderliche Zahl von Bestimmungsgleichungen für die vorhandene Zahl von Unbekannten. Die Reduzierung eines solchen Gleichungssystems auf eine für praktische Rechnungen handliche Form beruhte auf entsprechender Erfahrung.

Bekannt geworden sind die klassischen Verfahren besonders von DAMKÖHLER und EDSE [1] und von M. R. VON STEIN [2]. Während DAMKÖHLER und EDSE sich an ein spezielles Problem, nämlich die Berechnung von Feuergaskomponenten, halten, versuchte VON STEIN in seiner Arbeit über die Verbrennung von Gasöl in Sauerstoff [2] bereits ein verallgemeinertes Verfahren anzugeben.

Es ist nun für solche verallgemeinerte Verfahren charakteristisch, daß ihre Art fast immer durch den Lösungsweg gekennzeichnet ist. Man wird also ein verallgemeinertes System mit verschiedenen Lösungswegen fast stets verschieden behandeln. Gemeinsam aber ist allen die physikalische Grundlage, nämlich die Reaktionsgleichungen und die Atombilanzen.

Der Lösungsweg, den VON STEIN vorschlug, ist ein Eliminationsverfahren, welches das simultane System auf eine einzige nichtlineare Gleichung reduziert. Es ist die Ansicht der Verfasser, daß eine solche Reduktion im Falle sehr vieler Komponenten und vielfältiger Ausgangssubstanzen, das heißt einer größeren Zahl verschiedener Atomarten, sehr mühsam wird und eine Reihe von Fehlerquellen bereits beim Aufstellen der zu verwendenden Gleichung enthält.

Da die Berechnung von Komponentenkonzentrationen besonders im Zusammenhang mit Feuergasrechnungen interessierte, wurde in einer Reihe von Arbeiten das System C-H-O-N (Kohlenstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff) [3, 4, 5, 6, 7] behandelt. Ebenso wurden graphische Lösungswege [8] und Näherungsverfahren [9] untersucht.

Die Bemühungen, solche Lösungsverfahren zu verallgemeinern, wurden nach M. VON STEIN von anderen Autoren weiterverfolgt, z. B. von HUFF und Mitarbeitern [10], BRINKLEY [11, 12], KRIEGER und WHITE [13], und von MAGOT-CUVRU [14, 15]. Diese Arbeiten sollen im folgenden etwas näher betrachtet werden.

Der von HUFF und Mitarbeitern [10] vorgeschlagene Weg zur Lösung des auftretenden Gleichungssystems ist die NEWTONsche Form des Iterationsverfahrens, das heißt, die Funktionen werden um den Lösungspunkt in eine TAYLOR-Reihe entwickelt, die mit dem ersten Glied abgebrochen wird. Dieses Verfahren wird bei HUFF an Hand eines speziellen Beispiels für zwei nichtlineare Gleichungen gezeigt. Die Beziehungen für eine beliebige Zahl von nichtlinearen Gleichungen werden nicht angegeben. Bekanntlich entsteht dabei ein System linearer Gleichungen für die neuen Ausgangswerte der Variablen, zu dessen Lösung bei HUFF ein Matrizenverfahren vorgeschlagen wird. Dieses Verfahren ist besonders für manuelle Rechnung entwickelt. Seine direkte Übertragung für elektronische Geräte dürfte einige Schwierigkeiten bereiten. Das Aufstellen der Ausgangsgleichungen bei HUFF erfordert gute Sachkenntnis. HUFF und Mitarbeiter berichten, daß mit ihrem Verfahren bereits viele Fälle gerechnet worden sind und daß in jedem Fall das NEWTONsche Näherungsverfahren konvergierte.

BRINKLEY [11, 12] bringt nun bereits eine verallgemeinerte Theorie der chemischen Reaktionen im Gleichgewicht. Er versucht, die bisherigen empirischen Verfahren durch einen analytischen Formalismus zu ersetzen. Es gelang ihm eine sehr allgemeine, wenn auch komplizierte Formulierung des Systems. Wie KRIEGER und WHITE [13] bemerken, erfordert die Verwendung des Verfahrens von BRINKLEY sehr spezielle mathematische Kenntnisse. Andererseits verwendet BRINKLEY auch zwei getrennte Iterationsvorgänge zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems.

Während das Verfahren von BRINKLEY bisher nur mit Hilfe von Handrechenmaschinen verwendet wurde, haben KRIEGER und WHITE ihre Methode bei Verwendung von Handrechenmaschinen und Lochkartensystemen erprobt. In neuerer Zeit soll BRINKLEY auch sein Verfahren auf Lochkarten-Maschinen verwenden [16]; eine diesbezügliche Veröffentlichung ist jedoch den Verfassern nicht bekannt geworden. Nach derselben Mitteilung [16] sollen HIRSCHFELDER und Mitarbeiter auch elektronische Rechengeräte für die Berechnung von Komponentenkonzentrationen verwenden, wobei jedoch die Zahl der Komponenten 12 nicht überstiegen haben soll. Das Verfahren von HIRSCHFELDER und Mitarbeitern ist den Verfassern nicht bekannt geworden.

KRIEGER und WHITE verwenden nur einen einzigen Iterationsprozeß an Stelle von zweien bei der Methode von BRINKLEY. Das Verfahren von KRIEGER und WHITE stellt im wesentlichen eine starke Vereinfachung der Methode von BRINKLEY dar.

Es ist BRINKLEY zwar gelungen, eine sehr allgemeine Formulierung des Systems zu bringen, doch sind erhebliche mathematische und thermochemische Kenntnisse erforderlich, um dieses Verfahren anzuwenden. Die Reduktion der allgemeinen Gleichungssysteme auf ein spezielles Problem ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Bei KRIEGER und WHITE werden zwar die mathematischen Schwierigkeiten weitgehend beseitigt, dies geht jedoch wesentlich auf Kosten der Allgemeinheit des Formalismus.

Gleichzeitig ist bei beiden eben diskutierten Verfahren der Lösungsweg nur angedeutet und nicht so explizit gegeben, als man mit den angegebenen Gleichungen z. B. bereits eine Programmierung des Lösungsvorgangs durchführen könnte. Es ist ferner noch zu bemerken, daß für viele elektronische Rechenanlagen die Matrixschreibweise bei der Programmierung nicht ohne weiteres geeignet ist.

Eine der allgemeinsten Behandlungen chemischer Reaktionen dürfte von MAGOT-CUVRU in Angriff genommen worden sein [14, 15]. Hiervon interessiert an dieser Stelle im besonderen die Systemschreibweise und der Lösungsweg. Wie bereits oben erwähnt, hängen beide meist sehr eng zusammen. MAGOT-CUVRU verzichtet auf eine Substitution der Reaktionsgleichungen in die Atombilanzgleichungen zur Elimination von Komponenten außer den gewählten Basis-komponenten. Als Zahl der Unbekannten steht bei ihm die Gesamtzahl der Komponenten. Sein System erfordert nun die Entscheidung, in welcher Reihenfolge die vorhandenen Gleichungen berechnet werden müssen. Diese Reihenfolge ergibt sich so, daß zuerst eine Komponente geschätzt wird. Dann wird eine Gleichung herangezogen, in welcher nur die geschätzte Komponente und eine weitere Komponente enthalten sind, womit diese weitere berechnet wird. Mit diesen beiden Komponenten wird dann eine dritte gerechnet usw. Der Rechenweg wird in einem Schema veranschaulicht. Der Lösungsweg ist dann ein reines Iterationsverfahren. Es werden zuerst zwei Werte geschätzt und das System durchgerechnet. Mit diesen beiden Punkten kann man hierauf eine lineare Extrapolation zur Nullstelle durchführen, die dann als Verbesserung für den Ausgangswert verwendet wird.

Der Grund, warum hier nicht die Verwendung eines einfachen Iterationsverfahrens vorgeschlagen wird, sind die manchmal nicht unerheblichen Konvergenzschwierigkeiten, die man bei solchen Verfahren findet und die mit wachsender Zahl der Komponenten zunehmen. Insbesondere treten dann bei der Verwendung elektronischer Rechengерäte Schwierigkeiten auf, da man unter Umständen die Konvergenzkriterien mitprogrammieren muß und der Maschine die Entscheidung überlassen wird. Derartige Programme erfordern meist sehr große Anlagen und ausgedehnte Voruntersuchungen. Für C-H-N-O-Systeme mit einer Komponentenzahl bis zu 12 wurde beim Jet Propulsion Laboratory [17] ein relativ einfaches Programm entwickelt; es nehmen jedoch die Schwierigkeiten mit darüber hinaus wachsender Komponentenzahl so rasch zu, daß es ratsam scheint, das sicher konvergierende NEWTONsche Verfahren ausschließlich zu verwenden.

Bei der Berechnung von Komponentenkonzentrationen der Feuergase von Oktan-Luftgemischen [18] mit einer relativ großen Komponentenzahl wurde die Erfahrung gemacht, daß bei der Lösung mit Hilfe einer CPC-Lochkarten-Anlage keines der allgemein üblichen Iterationsverfahren außer dem NEWTONschen

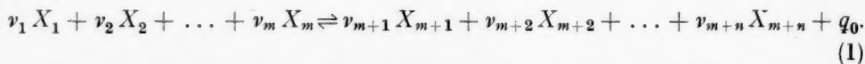
konvergierte. Über Einzelheiten der reinen Programmierung jedoch soll an anderer Stelle berichtet werden.

Aus diesen vorhergehenden Bemerkungen haben sich bereits eine Reihe wesentlicher Gesichtspunkte herausgeschält, die bei der Darstellung eines verallgemeinerten Systems nach Ansicht der Verfasser zu berücksichtigen wären. Zunächst dürfte das zu wählende Lösungsverfahren für das simultane System nichtlinearer algebraischer Gleichungen festliegen: nämlich das NEWTONsche Verfahren in seiner Verallgemeinerung für Gleichungssysteme. Dann soll das Lösungsverfahren für das entstehende lineare System für die verbesserten Variablen möglichst nicht mit einem Matrix-Schema operieren. Es kommen hierfür also im wesentlichen die Verfahren von GAUSS oder von GAUSS-BANACHIEWICZ in Frage, wobei dem zweiten bei größerer Zahl der Variablen der Vorzug zu geben ist. Das NEWTONsche Verfahren bedingt die Reduzierung der Komponenten auf die Basiskomponenten durch Substitution der Reaktionsgleichungen in die Atombilanzen, damit bei der Bildung der Ableitungen tatsächlich auch die Änderung einer Komponente infolge der Änderung der anderen ausgedrückt wird. Dann müssen alle Gleichungen in einer verallgemeinerten Form so vorliegen, daß ohne weitere Zwischenüberlegung durch möglichst nur eine einzige einfache Operation sofort *alle* Gleichungen vorhanden sind, mit denen gerechnet werden soll. Diese Gleichungen sollen so vorliegen, daß sie entweder sofort für eine elektronische Anlage programmiert oder aber mit Hilfe von Handrechenmaschinen gelöst werden können.

Das Einarbeiten in ein solches verallgemeinertes Verfahren wird vermutlich gewisse mathematische Kenntnisse voraussetzen, doch sollen diese über diejenigen nicht hinausgehen, die bei der Programmierung elektronischer Rechengeräte allgemein gefordert werden. Physikalische und chemische Kenntnisse werden bei der Anwendung des Verfahrens nicht gefordert.

Bei der Aufstellung eines solchen verallgemeinerten Systems wird notwendigerweise von ganz prinzipiellen Postulaten ausgegangen. Die Betrachtung einer Einzelreaktion wird erweitert auf eine beliebige Vielfalt von Reaktionen, für die chemisches Gleichgewicht gefordert ist.

Eine chemische Reaktion, an welcher m Substanzen der Art $X_{i < m}$ teilnehmen, um n Substanzen der Art $X_{i > m}$ zu bilden, ist darstellbar durch die Beziehung



Hierbei können ν_1 Moleküle der Sorte X_1 und ν_2 Moleküle der Sorte X_2 usw. unter Freiwerden der Energie $q_0 > 0$ in ν_{m+1} Moleküle der Sorte X_{m+1} usw. umgesetzt werden. Die Energie q_0 , die als Reaktionswärme bezeichnet wird, bezieht sich auf eine Reaktion am absoluten Temperaturnullpunkt. Das Zeichen \rightleftharpoons drückt bekanntlich die Reversibilität des Vorgangs aus. Sind insgesamt N_i Moleküle der Sorte X_i vorhanden, so gilt für die Änderung der Gesamtzahlen

$$\begin{aligned} \delta N_1 : \delta N_2 : \dots : \delta N_m : \delta N_{m+1} : \delta N_{m+2} : \dots : \delta N_n = \\ = \nu_1 : \nu_2 : \dots : \nu_m : (-\nu_{m+1}) : (-\nu_{m+2}) : \dots : (-\nu_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Die Bedingung für das Vorhandensein chemischen Gleichgewichts in einem isotherm-isochoren System ist bekanntlich, daß bei einer Variation der N_i

$$\delta \tilde{F} = 0, \quad (3)$$

mit der Nebenbedingung $\delta T = 0, \delta V = 0$.

Gleicherweise ist die Gleichgewichtsbedingung für ein isotherm-isobares System, daß bei einer Variation der N_i

$$\delta \tilde{G} = 0, \quad (4)$$

mit der Nebenbedingung $\delta T = 0, \delta p = 0$.

Dabei ist \tilde{F} die freie Energie des gesamten Systems, \tilde{G} die freie Enthalpie des gesamten Systems, T die absolute Temperatur, V das Gesamtvolumen und p der Gesamtdruck. Die Aufgabe besteht offensichtlich darin, mit Hilfe der Bedingungen (3) und (4) explizite Ausdrücke für die N_i abzuleiten. Zu diesem Zweck müssen die beiden Größen $\tilde{F}(T, V)$ und $\tilde{G}(T, p)$ bekannt sein.

Neben der Bedingung des Vorhandenseins chemischen Gleichgewichts im reagierenden System ist auch thermodynamisches Gleichgewicht, das heißt die Gültigkeit der MAXWELL-BOLTZMANNschen Energieverteilung, vorausgesetzt. Danach ist die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Energieniveaus E_n gegeben durch $C \cdot g_n e^{-E_n/kT}$, wobei g_n das statistische Gewicht des n -ten Niveaus ist. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines beliebigen Niveaus überhaupt ist $C \sum_n g_n e^{-E_n/kT} = 1$, also $\sum_n g_n e^{-E_n/kT} = 1/C = Z$. Dieser Ausdruck ist als Zustandssumme bekannt. Insbesondere ist die Zustandssumme eines Moleküls der Sorte X_i

$$z_i = \sum_{n_i} g_{n_i} e^{-E_{n_i}/kT} = e^{-u_{0i}/kT} \sum_{n_i} g_{n_i} e^{-\epsilon_{n_i}/kT} = e^{-u_{0i}/kT} z_i^*, \quad (5)$$

Die Zählung der Energieniveaus ϵ_{n_i} erfolgt dabei von einem beliebigen Wert u_{0i} aus. Geeigneterweise wird willkürlich festgesetzt, daß unter diesem Bezugswert u_{0i} der Energiezustand zu verstehen ist, der am absoluten Temperaturnullpunkt bei allen Molekülen der Sorte X_i als einziger besetzt ist. Die Zustandssumme eines Moleküls der Sorte X_i hängt mit der Gesamtzustandssumme der i -ten Komponente im System zusammen durch [19]

$$Z_i = \left(\frac{z_i}{N_i} \right)^{N_i}, \quad (6)$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Freie Energie \tilde{F}_i und freie Enthalpie \tilde{G}_i der N_i Moleküle der Sorte X_i sind dann

$$\tilde{F}_i = -kT \ln Z_i = -N_i kT \ln \frac{e z_i}{N_i} = -N_i kT \ln \left(\frac{e z_i^*}{N_i} \right) + N_i u_{0i} \quad (7)$$

und

$$\tilde{G}_i = \tilde{F}_i + p_i V = \tilde{F}_i + N_i kT. \quad (8)$$

Damit werden freie Energie \tilde{F} und freie Enthalpie \tilde{G} des Gesamtsystems

$$\tilde{F} = \sum_i \tilde{F}_i = -kT \sum_i N_i - kT \sum_i N_i \ln z_i^* + kT \sum_i N_i \ln N_i + \sum_i N_i u_{0i}, \quad (9)$$

und

$$\tilde{G} = \sum_i \tilde{G}_i = -kT \sum_i N_i \ln z_i^* + kT \sum_i N_i \ln N_i + \sum_i N_i u_{0i} \quad (10)$$

oder auch

$$-(\tilde{F} - \tilde{U}_0)/kT = \sum_i N_i \ln z_i^* - \sum_i N_i (\ln N_i - 1) \quad (9a)$$

und

$$-(\tilde{G} - \tilde{U}_0)/kT = \sum_i N_i \ln z_i^* - \sum_i N_i \ln N_i. \quad (10a)$$

Damit kann nun eine Explizierung der Bedingungen (3) und (4) erfolgen.

Zunächst soll der isotherm-isochore Fall behandelt werden. Sind insgesamt die Komponenten $i = 1, 2, \dots, l, m, \dots, q$ vorhanden, von denen aber nur die Komponenten $i = 1, 2, \dots, l$ an der Reaktion teilnehmen, so daß also $\delta N_i = 0$ für $i \geq m$ ist, dann wird nach Gl. (9) unter Verwendung von Gl. (2)

$$\frac{\delta \tilde{F}}{kT} = 0 = - \sum_{i=1}^l v_i \ln z_i^* + \sum_{i=1}^l v_i \ln N_i + \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^l v_i u_{0i}, \quad (11)$$

oder auch

$$\prod_{i=1}^l N_i^{v_i} = \left(\prod_{i=1}^l z_i^{*v_i} \right) \exp \left(- \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^l v_i u_{0i} \right) = K_N^{(T, V)}, \quad (12)$$

wobei nun $K_N^{(T, V)}$ die auf die Teilchenzahl bezogene Gleichgewichtskonstante für die isotherm-isochore Reaktion ist. $\sum v_i u_{0i}$ ist gleich der Wärmetönung der Reaktion Gl. (1) am absoluten Temperaturnullpunkt, also $\sum v_i u_{0i} = q_0$. Damit wird die auf die Teilchenzahl bezogene Gleichgewichtskonstante für die isotherm-isochore Reaktion

$$K_N^{(T, V)} = \prod_{i=1}^l N_i^{v_i} = \prod_{i=1}^l z_i^{*v_i} e^{-q_0/kT}. \quad (13)$$

Auf dieselbe Art und Weise erhält man die Gleichgewichtskonstante für den isotherm-isobaren Fall, wobei jedoch zu beachten ist, daß z_i^* bei der Variation nun nicht mehr konstant bleibt. Aus den Gln. (8) und (4) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{G}}{kT} = 0 = & - \sum_i \delta N_i \ln z_i^* - \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{N_j}{z_j^*} \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial z_j^*}{\partial N_i} \right)_{T, p} \delta N_i \right\} + \sum_i \delta N_i \ln N_i + \\ & + \sum_i \delta N_i + \frac{1}{kT} \sum_i \delta N_i u_{0i}. \end{aligned} \quad (14)$$

Spaltet man die Zustandssumme z_i^* , Gl. (5), in einen translatorischen Anteil $z_i^{(tr)*}$ und einen inneren Anteil $z_i^{(i)*}$ auf [20], dann folgt mit der Zustandsgleichung $pV = NkT$ des idealen Gases,

$$z_j^* = (2\pi m_j kT/h^2)^{3/2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^q N_i kT}{p} z_j^{(i)*}, \quad (15)$$

und damit

$$(\partial z_j^* / \partial N_i)_{T, p} = z_j^* \left/ \sum_{i=1}^q N_i \right.$$

Substituiert man diesen Ausdruck in Gl. (14), so folgt mit Gl. (2) für die Gleichgewichtsbedingung

$$0 = - \sum_i v_i \ln z_i^* + \sum_i v_i \ln N_i + \frac{1}{kT} \sum_i v_i u_{0i}, \quad (16)$$

also

$$\Pi_i N_i^{v_i} = \Pi_i z_i^{*v_i} \exp \left[-\frac{1}{kT} \sum_i v_i u_{0i} \right],$$

oder

$$K_N^{(T,p)} = \Pi_i N_i^{v_i} = \Pi_i z_i^{*v_i} e^{-q_0/kT} = K_N^{(T,V)}, \quad (17)$$

das heißt, die in Gesamtteilchenzahlen ausgedrückten Gleichgewichtskonstanten sind also im isotherm-isobaren System genau dieselben wie im isotherm-isochoren System, da q_0 wegen $p \cdot V = N k T = 0$ in beiden Fällen gleich ist. Die in Partialdrücken ausgedrückte Gleichgewichtskonstante ist $K_p^{(T,p)} = \Pi_i p_i^{v_i}$. Mit dem Ausdruck für den Partialdruck

$$p_i = \frac{N_i}{\sum_i N_i} p \quad (18)$$

wird

$$K_p = \Pi_i \left(\frac{N_i}{\sum_i N_i} p \right)^{v_i} = \Pi_i (p/\sum_i N_i)^{v_i} \Pi_i N_i^{v_i} = (p/\sum_i N_i)^{\sum_i v_i} K_N,$$

oder, mit der Zustandsgleichung des idealen Gases und mit Gl. (15) für z_i^* ,

$$K_p = \Pi_i p_i^{v_i} = \Pi_i \left(\frac{kT}{V} z_i^* \right)^{v_i} e^{-q_0/kT} = \Pi_i \left[(2\pi m_i/h^2)^{3/2} (kT)^{5/2} z_i^{(i)*} \right]^{v_i} e^{-q_0/kT}. \quad (19)$$

Im allgemeinen ist es vorteilhaft, die Partialdrücke auf den Gesamtdruck zu beziehen, um so die auf die Konzentration $c_i = N_i/\sum_i N_i = p_i/p$ bezogene Gleichgewichtskonstante K_c zu erhalten,

$$\begin{aligned} K_c &= \Pi_i (p_i/p)^{v_i} = \Pi_i c_i^{v_i} = \Pi_i \left[(2\pi m_i/h^2)^{3/2} \frac{(kT)^{5/2}}{p_0} (p_0/p) z_i^{(i)*} \right]^{v_i} e^{-q_0/kT} = \\ &= \Pi_i z_i^{*v_i} e^{-q_0/kT} (p_0/p)^{\sum_i v_i}, \end{aligned} \quad (20)$$

wobei dann

$$z_i' = (2\pi m_i/h^2)^{3/2} \frac{(kT)^{5/2}}{p_0} z_i^{(i)*} \quad (21)$$

ist. p_0 ist dabei ein willkürlicher Bezugsdruck, auf den z_i' normiert ist. Da die Verwendung von K_c in der Praxis am geeignetsten erscheint, soll noch eine Relation zur Berechnung von K_c aus der freien Enthalpie angegeben werden. Unter Verwendung der Zustandsgleichung des idealen Gases und unter Einführung des Bezugsdruckes p_0 folgt für Gl. (8), siehe auch Gl. (10),

$$\tilde{G}_i = -N_i k T (\ln z_i' - \ln (p_i/p_0) - u_{0i}/kT),$$

oder, bezogen auf ein Mol, also mit $N_i = L$ (LOSCHMIDTSche Zahl),

$$G_i = -RT (\ln z_i' - \ln (p_i/p_0)) + L u_{0i}.$$

$G_i - L u_{0i}$ ist dann der thermische Anteil der freien Enthalpie, das heißt die Differenz der freien Enthalpie bei $T = T^0$ K und $T = 0^0$ K. Die Größe $L u_{0i}$ bei der freien Enthalpie wird in der thermodynamischen Literatur vielfach mit H_{0i} bezeichnet. Die freie Enthalpie findet man generell in RT -Einheiten so tabuliert, daß $p_i/p_0 = 1$ gesetzt wird, also

$$-(G^0 - H_{0i})/RT = \ln z_i', \quad (p_i/p_0 = 1), \quad (22)$$

wobei der hochgestellte Index ⁰ den idealen Gaszustand bezeichnet. Allgemein gilt jedoch

$$-(G^0 - H_0^0)_i / R T = \ln z_i' - \ln (p_i / p_0). \quad (22 a)$$

Damit erhält man für K_c den Ausdruck

$$\ln K_c = \ln \prod_i c_i^{v_i} = \sum_i v_i [-(G^0 - H_0^0)_i / R T] - q_0 / k T. \quad (23)$$

Gl. (23) dient als Basis für die im folgenden zu entwickelnde Systemrechnung. Will man an Stelle des Druckes p im System die Dichte ρ als Parameter einführen, so ist einfach mit Hilfe der Zustandsgleichung für ideale Gase p durch ρ zu ersetzen gemäß

$$p = \rho k T / m.$$

Die Gleichgewichtskonstante für die i -te Reaktion im System, wobei die Gleichgewichtskonstanten sämtlich auf die Konzentrationen bezogen seien, wird im nachfolgenden einfach mit K_i^c bezeichnet.

Die Ableitung eines verallgemeinerten Gleichungssystems für die Behandlung von Systemen mit chemisch reagierenden Komponenten erfolgt auf Grund der physikalischen Voraussetzung, daß alle betrachteten chemischen Reaktionen im System im Gleichgewicht ablaufen, das heißt auf Grund der obigen Definition der Gleichgewichtskonstanten,

$$p_1^{v_1} p_2^{v_2} p_3^{v_3} \dots p_\sigma^{v_\sigma} = K_p, \quad c_1^{v_1} c_2^{v_2} c_3^{v_3} \dots c_\sigma^{v_\sigma} = K^c \quad (24)$$

für die Einzelreaktion, sowie auf Grund der mathematischen Definition der „Konzentration“ $c = (c_i \delta_{il})$, das heißt die Konzentrationen sind darstellbar als Elemente einer diagonalen Matrix. Nach der Definition der Konzentration, siehe auch Gl. (18) ff., ist die Spur der c -Matrix immer gleich Eins,

$$Sp \, c \equiv \sum_i^k c_i \delta_{ii} = 1, \quad (25)$$

wegen $c_i = p_i / \Sigma p_i$, $\Sigma c_i = \Sigma p_i / p$, $p = \Sigma p_i$. k ist die Anzahl der im System überhaupt vorkommenden Molekülsorten. $c = (c_i \delta_{il})$ ist eine Diagonalmatrix mit den Elementen $c_i \delta_{il}$, wobei die $c_i \delta_{il}$ beliebig gleich oder kleiner als Eins sein können, jedoch derart bestimmt sind, daß immer $\Sigma_i c_i \delta_{il} = 1$ erfüllt ist. (δ_{il} ist das KRONECKER-Delta.) Das heißt, wenn eine Anzahl k von Elementen $c_i \delta_{il}$ vorhanden ist, sind nur $(k - 1)$ dieser Werte anderweitig bestimmbar, während das k -te der Elemente dann durch Gl. (25) festliegt.

In der Ableitung eines solchen verallgemeinerten Systems dürfte es zweckmäßig sein, für den Begriff der Konzentration der i -ten Molekülsorte $c_i \delta_{il}$ (oder auch kurz c_i , da das KRONECKER-Delta bei den c_i erst bei der Einordnung in eine Matrix von Bedeutung wird) eine Symbolgruppe einzuführen, die dem Umstand des zunächst beliebigen Aufspaltens eines solchen Moleküls in Basissubstanzen j Rechnung trägt. Dies soll zunächst an einem Beispiel veranschaulicht werden. Die k Moleküle in einem System seien sämtliche aus einer oder mehreren von vier Basissubstanzen $j = 1, 2, 3, 4$, z. B. C, H, O, und N, aufgebaut. Man kann nun für jede Molekülsorte eine Reaktionsgleichung entsprechend (23) oder (24) anschreiben, also

$$\frac{c_i^{v_i}}{c_1^{-v_1} c_2^{-v_2} c_3^{-v_3} c_4^{-v_4}} = K_i^{c'} \quad \text{oder} \quad c_i^{v_i} c_1^{v_1} c_2^{v_2} c_3^{v_3} c_4^{v_4} = K_i^c. \quad (24 a)$$

Eine Gleichung dieser Art wird dann nach c_i aufgelöst und daraus die v_i -te Wurzel gezogen, also $c_i = c_1^{-v_1/v_i} c_2^{-v_2/v_i} \dots c_4^{-v_4/v_i} \cdot K_i^c$, wobei $K_i^c = (K_i^{c'})^{1/v_i}$ ist. Man

kann dies nun auch schreiben $c_i = \prod c_j^{-v_j/v_i} K_i^c$. Die Symbole c_j werden jetzt ersetzt durch Symbole x_j , da diese nicht immer notwendigerweise Konzentrationen sein müssen (es könnte z. B. erst x_j^2 eine Konzentration sein). Die Symbole $-v_j/v_i$ werden durch die Symbole a_{ij} ersetzt. Man erhält somit den Ausdruck

$$c_i \delta_{il} = \prod_j x_j^{a_{ij}} K_i^c = \text{Det } x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il} = |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}|. \quad (26)$$

Ordnet man nun die Elemente $c_i \delta_{il}$ in eine Matrix ein, dann folgt

$$(c_i \delta_{il}) = (|x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}|). \quad (26 a)$$

Die a_{ij} sind als Matrix

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \dots & \dots & a_{km} \end{pmatrix}$$

darstellbar. Bei einem Dissoziations- oder Rekombinationsvorgang stellen die a_{ij} , physikalisch gesehen, die Zahl der Atome j im Molekül i dar. Sinngemäß stellen die a_{ij} bei einem Ionisierungsvorgang die Zahl der Ladungen dar. m ist die Zahl aller Sorten von Basissubstanzen im System.

Zunächst sind die x im Ausdruck $x_j^{a_{ij}}$ Symbole für die Konzentrationen entweder der Basisatome oder Elementmoleküle. Durch Zusammenfassung verschiedener x zu einer neuen Basisgruppe ist es jedoch leicht möglich, das System nicht nur auf Elementen und gleichatomigen Elementverbindungen, sondern auf beliebigen Verbindungen aufzubauen. So z. B. wird es für verschiedene praktische Fälle interessant sein, die Kohlenstoffverbindungen (z. B. CO_2 , CH , CN usw.) an Stelle auf C, bzw. C_2 nun auf $i = \text{CO}$ zu beziehen, da z. B. CO merklich vertreten sein kann, während C und C_2 fast gar nicht im System vorhanden sind. Wäre C, bzw. C_2 mit x_1 und O, bzw. O_2 mit x_2 , dann wäre $c_{\text{CO}} = x_1 x_2 K_{\text{CO}}^c$, bzw. $\sqrt{x_1 x_2} K_{\text{CO}}^c$. Man setzt nun diesen Ausdruck einfach gleich einer neuen Variablen, z. B. u , und führt dann die weitere Gruppierung der Symbole ohne Schwierigkeiten konsequent durch. Auch kann aus Konvenienzgründen an Stelle jedes beliebigen x_j eine andere Variable, z. B. $z_j^n = x_j$ (n beliebig reell), eingeführt werden, solange diese Substitution konsequent durchgeführt wird. Durch eine solche Maßnahme wird lediglich die Größe der K_i^c beeinflusst. Die Umgruppierung kann bereits im Schema der a_{ij} erfolgen, ohne daß irgendwelche Gleichungen angeschrieben werden müssen. Ein Beispiel hierfür wird am Ende dieser Arbeit angegeben. Es soll hier betont werden, daß das Ersetzen schwach verteilter Komponenten als Basis durch stark vertretene nicht erforderlich ist und keinen Einfluß auf die Genauigkeit des Ergebnisses hat.

Chemische Reaktionen, entgegen physikalischen (oder nuklearen) Reaktionen, sind dadurch gekennzeichnet, daß die Basisatome keine Veränderung in Beziehung auf ihre Kernstruktur erfahren. Die bei solchen Schalenreaktionen umgesetzten Energien sind derart gering, daß irgendwelche Massendefekte infolge solcher Reaktionen vernachlässigt werden können. Aus diesem Grund ist zu verlangen, daß die Zahl der Atome von der Sorte j vor der Reaktion im gesamten System gleich der Zahl der Atome von der Sorte j nach der Reaktion im gesamten System sein muß, also $N_j = N_j^*$, wobei N hier immer eine Gesamtteilchenzahl bedeutet. Gleichzeitig ist aber auch $N_{j+1} = N_{j+1}^*$ und damit $N_j/N_{j+1} = N_j^*/N_{j+1}^*$, oder $\frac{N_j/N}{N_{j+1}/N} = \frac{N_j^*/N}{N_{j+1}^*/N}$, das heißt die Verhältnisse der „Atomkonzentrationen“

bleiben während der Reaktion konstant. Obwohl man vielfach die Ausdrücke „Atomkonzentration“ oder „Atomdruck“ für N_j/N in der thermodynamischen Literatur findet, soll hier dafür der Ausdruck „relative Atomzahl“ verwendet werden, da N_j/N größer als Eins werden kann und damit nicht mehr dem oben definierten Sinn einer Konzentration entspricht. Die Zahl N_j der Atome j , wenn nur eine Molekülsorte vorliegt, ist $N_j = a_{ij} N_i$. Damit ist $N_j/N = a_{ij} N_i/N$, das heißt die relative Atomzahl ist das Produkt aus Konzentration der Molekülsorte i und Zahl der Atome j im Molekül i . Wenn mehrere Molekülsorten gegeben sind, das heißt wenn ein Diagonalschema mehrerer i -Elemente vorliegt, ist die Spur dieser Matrix zu bilden, also

$$\frac{N_j}{N_{j+1}} = \frac{\sum a_{ij} N_i \delta_{il}}{\sum a_{i,j+1} N_i \delta_{il}} \quad \text{und} \quad \frac{N_j/N}{N_{j+1}/N} = \frac{\sum a_{ij} N_i \delta_{il}/N}{\sum a_{i,j+1} N_i \delta_{il}/N} = \frac{\sum a_{ij} c_i \delta_{il}}{\sum a_{i,j+1} c_i \delta_{il}}.$$

Demzufolge ist mit Hilfe von Gl. (26) die relative Atomzahl für ein Molekül der Sorte i allgemein darstellbar durch

$$a_{ij} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}|,$$

und die relativen Atomzahlen für alle k Moleküle sind für ein Basisatom der j -ten Sorte

$$\sum_i^k a_{ij} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}| = \sum_{i=1}^k a_{ij} \left(\prod_{j=1}^m x_j^{a_{ij}} \right) K_i^c. \quad (27)$$

Um zur vollständigen Atombilanz zu kommen, sind die Ausdrücke (27) im j -Schema einzuordnen. Geeigneterweise bringt man die Atombilanzen in ein Verhältnis mit einer dieser Bilanzen, z. B. derjenigen für das m -te Basisatom. Die Erfahrung zeigt, daß man für diesen Zweck am geeignetsten eine nicht-reagierende Substanz heranzieht. Dies ist auch aus den hier vorgelegten Gleichungen ersichtlich, da die Bilanzgleichung für eine nichtreagierende Komponente am einfachsten wird. Nach dem Obgesagten sind dann diese Verhältnisse, die hier mit A_j bezeichnet werden sollen, über die gesamte Reaktion konstant. Spurbildung über das j -Schema und Bildung der Untermatrix zum Element $\sum_i a_{im} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}|$, das als Bezugsbasis verwendet wird, ergibt die Gesamtbilanz für die Basisatome der Sorte j

$$(A_j \delta_{jh}) = \left(\frac{\sum_i a_{ij} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}|}{\sum_i a_{im} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}|} \cdot \delta_{jh} \right)^{j \neq m}$$

oder auch

$$\left(\sum_i^k a_{ij} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}| \delta_{jh} \right)^{j \neq m} - \left(A_j \left\{ \sum_i^k a_{im} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}| \right\} \delta_{jh} \right) = 0. \quad (28)$$

Hierbei ist 0 eine Null-Matrix. Man kann somit Gl. (28) in $m - 1$ Gleichungen separieren. Zusammen mit der nichtseparierten Gl. (25) hat man also nun m Gleichungen für die m Unbekannten x_j , oder zusammen mit der separierten Gl. (25 a) insgesamt k Gleichungen für die k Unbekannten $c_i \delta_{il} = |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}|$. Die Gesamtzahl der Gleichungen ist zwar $m + k$, wobei aber in den k Gleichungen m reine Definitionsgleichungen enthalten sind, die für die Lösung nicht weiter wesentlich sein können. Damit ist dieses System auch nicht überbestimmt.

Die Bestimmung der A_j erfolgt aus einer gegebenen Ausgangszusammensetzung, aus Konvenienzgründen meist aus der Zusammensetzung vor der Reak-

tion. Es seien also jeweils v_i Mole der Substanzen $X_{a_{ij}}^{(j)}$ gegeben. Man hat dann die Ausgangszusammensetzung

$$\begin{aligned} \sum_i v_i X_{a_{ij}}^{(j)} &= v_1 X_{a_{1j}}^{(j)} + v_2 X_{a_{2j}}^{(j)} + \dots \dots \\ &= v_1 X_{a_{11}}^{(1)} X_{a_{12}}^{(2)} X_{a_{13}}^{(3)} \dots X_{a_{1m}}^{(m)} + v_2 X_{a_{21}}^{(1)} X_{a_{22}}^{(2)} \dots X_{a_{2m}}^{(m)} + \dots \dots \quad (29) \end{aligned}$$

Die Konzentration c_i der Substanz $X_{a_{ij}}^{(j)}$ in der Ausgangszusammensetzung ist dann sofort gegeben durch

$$c_i = \frac{v_i}{\sum_i v_i}.$$

Sind in der Ausgangszusammensetzung insgesamt σ verschiedene Substanzen $X_{a_{ij}}^{(j)}$ gegeben, dann ergibt sich nun sofort für die A_j der Ausdruck

$$A_j = \frac{\sum_i^{\sigma} a_{ij} v_i}{\sum_i a_{im} v_i}. \quad (30)$$

Dabei sind häufig Zusammenhänge zwischen den v_i gegeben, die aus der Natur der chemischen Reaktion hervorgehen. Ein Beispiel hierfür wird im nachfolgenden aufgezeigt.

Die Aufgabe der Berechnung der Konzentrationen der Systempartner als Funktion von Druck (oder Dichte) und Temperatur besteht darin, das nicht-lineare Gleichungssystem (25), (26 a), (28) zu lösen. Praktische Untersuchungen haben gezeigt, daß sich (insbesondere für programmgesteuerte elektronische Rechengeräte und Lochkarten-Rechengeräte) im wesentlichen nur das NEWTONsche Verfahren für kompliziertere Systeme eignet. Bei einfachen Systemen gelingt oft die Reduktion des Gleichungssystems auf ein oder zwei Variable. Hier soll besonders ein Lösungsverfahren diskutiert werden, das mit Hilfe elektronischer Rechengeräte auch bei sehr komplizierten Systemen zum Ziel führt.

Werden gewisse Ausgangswerte x_j geschätzt und in das Gleichungssystem eingesetzt, dann werden die Gleichungen nicht erfüllt, sondern es treten gewisse Defekte f^j auf. Man hat somit

$$\begin{aligned} \left(\sum_i^k a_{ij} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il} \delta_{jh}| \right) - \left(A_j \left\{ \sum_i^k a_{im} |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il} \right\} \delta_{jh} \right) &= (f^j) \quad (31) \\ \sum_i^k |x_j^{a_{ij}} K_i^c \delta_{il}| - 1 &= f^m. \end{aligned}$$

Dabei seien die f^j in einem interessierenden Bereich des x_j -Raumes stetig partiell differenzierbare Funktionen. In Verallgemeinerung des NEWTONschen Verfahrens bei nur einer Variablen erhält man für den Fall von m Variablen

$$f^j(x_{j(p)}) + \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial f^j(x_j)}{\partial x_q} \right)_{x_{j(p)}} [x_{q(p+1)} - x_{q(p)}] = 0. \quad (32)$$

Ausgehend von der p -ten Näherung $x_{j(p)}$ ist dieses ein lineares Gleichungssystem für die m neuen Werte $x_{j(p+1)}$. Die partielle Differentiation des Systems (31) ist elementar durchführbar. Man hat

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial x_j}\right) = \left(\sum_i^k a_{ij} x_{(i)}^{jh} \delta_{jh}\right) - \left(A_j \left\{ \sum_i^k a_{im} x_{(i)}^{jh} \right\} \delta_{jh}\right), \quad (33)$$

$$\sum_i^k x_{(i)}^{jh} \delta_{jh} = \partial^m / \partial x_j,$$

wobei

$$x_{(i)}^{jh} \delta_{jh} = \frac{\partial |x_j^{aj} K_i^c \delta_{il}|}{\partial x_{jh}} \delta_{jh} \quad (34)$$

der Minor zum Element x_{jh} im j -Schema ist.

Die Auflösung der Gln. (32) erfolgt nach einem der bekannten Verfahren zur Lösung von Systemen linearer algebraischer Gleichungen, wovon hier das Verfahren von GAUSS-BANACHIEWICZ [21] vorgeschlagen wird, das sich besonders für Systeme von fünf und mehr Gleichungen bewährt. Zu diesem Zweck schreibt man die inhomogene Gleichung (32)

$$\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \eta; \quad (35)$$

die dazugehörige homogene Gleichung ist

$$\mathfrak{A} \mathfrak{x} = 0. \quad (36)$$

Die Matrix \mathfrak{A} und der Vektor η werden als bekannt vorausgesetzt, während die m Komponenten von \mathfrak{x} gesucht sind. Ist $|\mathfrak{A}| \neq 0$, dann existiert \mathfrak{A}^{-1} und es folgt, falls $\eta \neq 0$, (CRAMERSche Regel),

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1} \eta = \frac{\mathfrak{A}^\dagger \eta}{|\mathfrak{A}|}, \quad (37)$$

wobei \mathfrak{A}^\dagger die adjungierte Matrix ist. Zur praktischen Lösung schreibt man $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \eta$ in der Form $\tilde{\mathfrak{A}} \tilde{\mathfrak{x}} = 0$, wobei $\tilde{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}, \eta)$ und $\tilde{\mathfrak{x}}$ aus \mathfrak{x} durch Hinzufügen der $(n+1)$ -ten Komponente -1 entsteht. Für $\tilde{\mathfrak{A}}$ macht man den Ansatz

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{C} \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \gamma_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & \gamma_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} +1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_{21} & +1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_{m1} & -c_{m2} & \dots & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} & b_1 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{mm} & b_m \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Dann ist $\tilde{\mathfrak{A}} \tilde{\mathfrak{x}} = 0$ gleichwertig $\mathfrak{B} \tilde{\mathfrak{x}} = 0$ wegen $|\mathfrak{C}| = 1 \neq 0$. Man kann damit \mathfrak{x} aus $\mathfrak{B} \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ berechnen, wobei $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ und $\mathfrak{b} = (b_k)$ ist. Hierzu dienen die Gleichungen

$$b_{11} = a_{11}, \quad c_{i1} = -a_{i1}/b_{11} \quad (i = 2, \dots, m),$$

$$b_{ik} = a_{ik} + (c_{i1} b_{1k} + c_{i2} b_{2k} + \dots + c_{i,i-1} b_{i-1,k}) \quad \text{für } i \leq k,$$

$$c_{ik} = (a_{ik} + c_{i1} b_{1k} + \dots + c_{i,i-1} b_{i-1,k})/(-b_{kk}) \quad \text{für } i > k, \quad (39)$$

$$b_i = \gamma_i, \quad b_i = \gamma_i + c_{i1} b_1 + \dots + c_{i,i-1} b_{i-1}, \quad (i = 2, \dots, m),$$

$$x_i = (-b_i + b_{i,i+1} x_{i+1} + \dots + b_{im} x_m)/(-b_{ii}), \quad (i = m, m-1, \dots, 2, 1).$$

Damit sind alle erforderlichen Beziehungen für die Berechnung der Zusammensetzung von chemisch reagierenden Systemen im Gleichgewicht gegeben.

Man kann nun sofort dieses System verwenden, um Gasgleichgewichte zu berechnen. Der Einbau heterogener Gleichgewichte in Systeme mit Gasgleichgewichten wird an anderer Stelle diskutiert [18].

Die praktische Anwendung dieses Systems soll nun an Hand von zwei Beispielen diskutiert werden. Als erstes soll ein relativ einfaches Beispiel gewählt werden: H_2O bei mäßigen Temperaturen (etwa 2000 bis 4000° K). Die Basis-substanzen sind hier H und O, bzw. H_2 und O_2 . Die auftretenden Komponenten sind: H_2O , OH, H_2 , O_2 , H und O.

Das a_{ij} -Schema ist:

	1 O	2 H	
H_2O	1	2	K_1
OH	1	1	K_2
O	1	0	K_3
H	0	1	K_4
O_2	2	0	K_5
H_2	0	2	K_6

Gl. (30) ergibt:

$$A_2 = a_{\text{H}_2\text{O}, \text{H}_2} / a_{\text{H}_2\text{O}, \text{O}_2} = a_{\text{H}_2\text{O}, \text{H}} / a_{\text{H}_2\text{O}, \text{O}} = 2.$$

Gl. (28) liefert:

$$A_2 = 2 = \frac{2 x_1 x_2^2 K_1 + x_1 x_2 K_2 + x_2 K_4 + 2 x_2^2 K_6}{x_1 x_2^2 K_1 + x_1 x_2 K_2 + x_1 K_3 + 2 x_1^2 K_5}.$$

Aus den Gln. (25) und (26 a) folgt

$$\begin{aligned} Sp(c_i \delta_{il}) &= 1 = x_1 x_2^2 K_1 + x_1 x_2 K_2 + x_1 K_3 + x_2 K_4 + x_1^2 K_5 + x_2^2 K_6 \\ &= c_{\text{H}_2\text{O}} + c_{\text{OH}} + c_{\text{O}} + c_{\text{H}} + c_{\text{O}_2} + c_{\text{H}_2}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der beiden Zeilen liefert einmal die Ausdrücke für die einzelnen Konzentrationen, zum anderen Mal die Handhabe zur Berechnung der Gleichgewichtskonstanten K_i nach Gln. (26), (24 a) und (23). Zuerst muß man nun hier entscheiden, ob man die Atome oder die Elementmoleküle als Basissubstanzen heranzieht. Dies steht vollkommen frei. Je nachdem sind dann entweder K_3 und K_4 , oder aber K_5 und K_6 gleich Eins. Im ersten Falle sind dann x_1 und x_2 die Konzentrationen von O und H, im letzteren Falle sind x_1 und x_2 die Wurzeln der Konzentrationen von O_2 und H_2 .

Man hat nun bereits die Ausgangsgleichungen für die Rechnung. Diese sollen jedoch zusammen mit den Gleichungen für die Verbesserung der Ausgangswerte entsprechend den Gln. (31) bis (34) und (35) bis (39) angeschrieben werden. Diese lauten:

$$f^1 = x_1 x_2 K_2 + 2 x_1 K_3 - x_2 K_4 + 4 x_1^2 K_5 - 2 x_2^2 K_6$$

$$f^2 = x_1 x_2^2 K_1 + x_1 x_2 K_2 + x_1 K_3 + x_2 K_4 + x_1^2 K_5 + x_2^2 K_6 - 1$$

$$f_{x_1}^1 = \partial f^1 / \partial x_1 = 8 x_1 K_5 + x_2 K_2 + 2 K_3$$

$$f_{x_2}^1 = x_1 K_2 - K_4 - 4 x_2 K_6$$

$$f_{x_1}^2 = x_2^2 K_1 + x_2 K_2 + K_3 + 2 x_1 K_5$$

$$f_{x_2}^2 = 2 x_1 x_2 K_1 + x_1 K_2 + K_4 + 2 x_2 K_6$$

$$\Delta x_1 = - [(f^1/f_{x_1}^1) + \Delta x_2(f_{x_2}^1/f_{x_1}^1)]$$

$$\Delta x_2 = - \frac{f^1/f_{x_1}^1 - f^2/f_{x_1}^2}{f_{x_2}^1/f_{x_1}^1 - f_{x_2}^2/f_{x_1}^2}$$

Mit diesen Gleichungen wird nun so gerechnet, daß man zuerst zwei Ausgangswerte, also x_1 und x_2 , schätzt und dann die Verbesserung für diese Werte rechnet.

Das einzige, was benötigt wird, um dieses allgemeine System auf einen speziellen Fall zu reduzieren, ist die Festlegung der Basiskomponenten und der übrigen Komponenten des Systems, das heißt nichts weiter als die Problemstellung selbst.

Als weiteres Beispiel für die praktische Anwendung des vorgelegten verallgemeinerten Gleichungssystems sei die Verbrennung eines Kohlenwasserstoffs $(CH_x)_n$ in Luft angeführt. Die auftretenden Komponenten erhält man entweder aus der Literatur über massenspektroskopische Untersuchungen von Flammen (siehe z. B. [22]) oder aber durch rechnerische Abschätzung mit Hilfe bereits veröffentlichter [18] oder stark näherungsweise berechneter Zusammensetzungen. Hier seien zunächst 20 Komponenten berücksichtigt, wie sie etwa in einem dissoziierenden Feuergas Oktan-Luft bei schwach überstöchiometrischem, stöchiometrischem, oder unterstöchiometrischem Brand bis etwa 4000° K auftreten können. Man stellt zunächst das a_{ij} -Schema auf:

i	$j = 1$	2	3	4	5	6
\downarrow	O	H	N	C	A	e ⁻
1 CO ₂	2	0	0	1	0	0
2 H ₂ O	1	2	0	0	0	0
3 NO ₂	2	0	1	0	0	0
4 CO	1	0	0	1	0	0
5 OH	1	1	0	0	0	0
6 NO	1	0	1	0	0	0
7 NO ⁺	1	0	1	0	0	-1
8 CN	0	0	1	1	0	0
9 CH	0	1	0	1	0	0
10 NH	0	1	1	0	0	0
11 O ₂	2	0	0	0	0	0
12 H ₂	0	2	0	0	0	0
13 N ₂	0	0	2	0	0	0
14 C ₂	0	0	0	2	0	0
15 O	1	0	0	0	0	0
16 H	0	1	0	0	0	0
17 N	0	0	1	0	0	0
18 C	0	0	0	1	0	0
19 A	0	0	0	0	1	0
20 e ⁻	0	0	0	0	0	1

$$=$$

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
a_{61}	a_{66}
a_{71}	a_{76}
a_{81}	a_{86}
a_{91}	a_{96}
$a_{10,1}$	$a_{10,6}$
$a_{11,1}$	$a_{11,6}$
$a_{12,1}$	$a_{12,6}$
$a_{13,1}$	$a_{13,6}$
$a_{14,1}$	$a_{14,6}$
$a_{15,1}$	$a_{15,6}$
$a_{16,1}$	$a_{16,6}$
$a_{17,1}$	$a_{17,6}$
$a_{18,1}$	$a_{18,6}$
$a_{19,1}$	$a_{19,6}$
$a_{20,1}$	$a_{20,6}$

Damit erhält man nun sofort sechs Gleichungen mit den sechs Unbekannten $x_1 \dots x_6$ aus den Gln. (25 a), (26 a) und (28). Dieses System kann jedoch noch vereinfacht werden. Dies soll für den Fall der Elimination von c_{20} durch Elimination von x_6 , sowie Transformation der Variablen auf $x^4 = c_{O_2}$, $y^2 = c_{H_2}$, $z^4 = c_{N_2}$, $u = c_{CO}$ und $v = c_A$ gezeigt werden. Als Basis für die Atombilanzen wird $x_5 = v$ gewählt, da dies eine nichtreagierende Substanz in diesem System ist und die Gleichungen daher recht einfach werden.

Die Atombilanz für die ionisierten Komponenten ist, wenn $x_m^{a_i m} = x_5^{a_{19,3}} = v$ gesetzt wird,

$$A_6 v = -c_{\text{NO}^+} + c_{e^-}.$$

Wegen $A_6 = 0$ [s. Gl. (30)] folgt hieraus $c_{e^-} = c_{\text{NO}^+}$. Damit kann man bereits anstelle von

$$c_{\text{NO}^+} = \prod_i x_j^{a_{7,j}} K_{\text{NO}^+}^c = \frac{x_1 x_3}{x_6} K_{\text{NO}^+}^c$$

den Ausdruck $c_{\text{NO}^+} = \sqrt{c_{\text{NO}^+} \cdot x_6} = \sqrt{x_1 x_3 K_{\text{NO}^+}^c}$ schreiben, oder, mit $x_1 = z_1^2$, $x_3 = z_3^2$ folgt $c_{\text{NO}^+} = z_1 z_3 \sqrt{K_{\text{NO}^+}^c}$. Damit kann man bereits die neuen Variablen angeben, wenn man sich ferner noch auf CO anstelle von C oder C_2 bezieht (da ersteres bei nicht zu hohen Temperaturen weitaus stärker im Gemisch vertreten sein wird), nämlich

$$c_{\text{O}_2} = z_1^4, \quad c_{\text{H}_2} = z_2^2, \quad c_{\text{N}_2} = z_3^4, \quad c_{\text{CO}} = z_4, \quad c_{\text{A}} = z_5.$$

Die Spalte $j = 6$ und die Reihe $i = 20$ sind damit eliminiert. Es ergibt sich für die $\prod_j x_j^{a_{ij}} K_i^c = \prod_j (z_j^{n_j})^{a_{ij}} K_i^c = \prod_j z_j^{b_{ij}} K_i^c$ folgendes b_{ij} -Schema:

i	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	K_i^c
CO_2	2	0	0	1	0	K_1
H_2O	2	2	0	0	0	K_2
NO_2	4	0	2	0	0	K_3
CO	0	0	0	1	0	K_4
OH	2	1	0	0	0	K_5
NO	2	0	2	0	0	K_6
NO^+	1	0	1	0	0	K_7
CN	-2	0	2	1	0	K_8
CH	-2	1	0	1	0	K_9
NH	0	1	2	0	0	K_{10}
O_2	4	0	0	0	0	K_{11}
H_2	0	2	0	0	0	K_{12}
N_2	0	0	4	0	0	K_{13}
C_2	-4	0	0	2	0	K_{14}
C	-2	0	0	1	0	K_{15}
O	2	0	0	0	0	K_{16}
H	0	1	0	0	0	K_{17}
N	0	0	2	0	0	K_{18}
A	0	0	0	0	1	K_{19}

Wendet man dieses b_{ij} -Schema, sowie das a_{ij} -Schema, auf die Gln. (25), (26 a) und (28) an, so erhält man die fünf Ausgangsgleichungen für die numerische Berechnung,

$$A_1 z_5 K_{19} = 2 z_1^2 z_4 K_1 + z_1^2 z_2^2 K_2 + 2 z_1^4 z_3^2 K_3 + z_1^2 z_2 K_5 + z_4 K_4 + z_1^2 z_3^2 K_6 + z_1 z_3 K_7 + 2 z_1^4 K_{11} + z_1^2 K_{16}$$

$$A_2 z_5 K_{19} = 2 z_1^2 z_2^2 K_2 + z_1^2 z_2 K_5 + z_2 z_4 K_9 / z_1^2 + z_2 z_3^2 K_{10} + 2 z_2^2 K_{12} + z_2 K_{17}$$

$$A_3 z_5 K_{19} = z_1^4 z_3^2 K_3 + z_1^2 z_3^2 K_6 + z_1 z_3 K_7 + z_3^2 z_4 K_8 / z_1^2 + z_2 z_3^2 K_{10} + 2 z_3^4 K_{13} + z_3^2 K_{18}$$

$$A_4 z_5 K_{19} = z_1^2 z_4 K_1 + z_4 K_4 + z_3^2 z_4 K_8 / z_1^2 + z_2 z_4 K_9 / z_1^2 + 2 z_4^2 K_{14} / z_1^4 + \\ + z_4 K_{15} / z_1^2 \\ z_1^2 z_4 K_1 + z_1^2 z_2^2 K_2 + z_1^4 z_3^2 K_3 + z_4 K_4 + z_1^2 z_2 K_5 + z_1^2 z_3^2 K_6 + 2 z_1 z_3 K_7 + \\ + z_3^2 z_4 K_8 / z_1^2 + z_2 z_4 K_9 / z_1^2 + z_2 z_3^2 K_{10} + z_1^4 K_{11} + z_2^2 K_{12} + z_3^4 K_{13} + \\ + z_4^2 K_{14} / z_1^4 + z_4 K_{15} / z_1^2 + z_1^2 K_{16} + z_2 K_{17} + z_3^2 K_{18} + z_5 K_{19} = 1.$$

Für eine numerische Auswertung wird man geeigneterweise die Variablen u und v dann explizit als Funktionen von x, y, z ausdrücken, wenn diese linear vorkommen. Dies ist für v hier grundsätzlich der Fall. Bei Temperaturen bis 4000 °K ist selbst K_{10} noch sehr klein, so daß man es für nicht allzu genaue Rechnungen vernachlässigen kann. Damit wird auch die Gleichung für u linear. Grundsätzlich kann man einfach alle Variablen, die nur linear im System vorkommen, explizit als Funktion der nichtlinearen Variablen ausdrücken, um so die Gesamtzahl der zu lösenden Gleichungen zu reduzieren. Ob eine Variable nur linear vorkommt, läßt sich sofort an Hand des a_{ij} -Schemas ansehen. Eine Variable kommt dann nur linear vor, wenn die Differenz zwischen den a_{ij} -Werten in der betreffenden j -Spalte des Schemas absolut genommen größtenfalls Eins ist. Für irgendwelche Operationen mit diesem a_{ij} -Schema gelten die bekannten Regeln der Matrizenrechnung.

Als Abschluß soll noch ein Beispiel für die Ermittlung der A_i aus Gl. (30) gegeben werden, und zwar verallgemeinerte Ausdrücke für die Verbrennung eines Kohlenwasserstoffs $(CH_x)_n$ in beliebig feuchter Luft. Zur stöchiometrischen Verbrennung von 1 Mol $(CH_x)_n$ oder n Molen CH_x in reinem Sauerstoff werden $n(1 + x/4)$ Mole O_2 benötigt. Berücksichtigt man nichtstöchiometrische Verbrennung durch den Faktor m , dann folgt sofort für die Verbrennung von $(CH_x)_n$ in Luft

$$m n CH_x + n \left(1 + \frac{x}{4}\right) O_2 + n \left(1 + \frac{x}{4}\right) (c_{N_2}/c_{O_2})_L N_2 + n \left(1 + \frac{x}{4}\right) (c_{CO_2}/c_{O_2})_L CO_2 + \\ + n \left(1 + \frac{x}{4}\right) (c_{H_2O}/c_{O_2})_L H_2O + n \left(1 + \frac{x}{4}\right) (c_A/c_{O_2})_L A,$$

oder, nach Division durch $n(1 + x/4)$,

$$\frac{m}{1 + \frac{x}{4}} CH_x + O_2 + (c_{N_2}/c_{O_2})_L N_2 + (c_{CO_2}/c_{O_2})_L CO_2 + (c_{H_2O}/c_{O_2})_L H_2O + (c_A/c_{O_2})_L A.$$

Der Index L bezeichnet die Komponentenkonzentrationen in Luft. Ein Vergleich mit Gl. (29) liefert die Koeffizienten

$$v_1 = \frac{m}{1 + \frac{x}{4}}, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = (c_{N_2}/c_{O_2})_L, \quad v_4 = (c_{CO_2}/c_{O_2})_L,$$

$$v_5 = (c_{H_2O}/c_{O_2})_L, \quad v_6 = (c_A/c_{O_2})_L,$$

und die Substanzen

$$X_1 = CH_x, \quad X_2 = O_2, \quad X_3 = N_2, \quad X_4 = CO_2, \quad X_5 = H_2O, \quad X_6 = A.$$

Man kann nun die Konzentrationsverhältnisse $(c_i/c_{O_2})_L$ der Luft auf diejenigen der trockenen Luft reduzieren, indem man den Feuchtigkeitsgrad der Luft β (β = Konzentration von H_2O in Luft) einführt. Man hat dann alle anderen Konzentrationen der Komponenten trockener Luft mit $(1 - \beta)$ zu multiplizieren. Unter Anwendung von Gl. (30) erhält man dann sofort für die oben eingeführten Konstanten A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$A_1 = 2 [(c_{O_2} + c_{CO_2})/c_A]_{tr. L.} + \left(\frac{1}{c_A}\right)_{tr. L.} \cdot \frac{\beta}{1 - \beta},$$

$$A_2 = \frac{m x}{1 + \frac{x}{4}} (c_{O_2}/c_A)_{tr. L.} + \left(\frac{1}{c_A}\right)_{tr. L.} \cdot \frac{2\beta}{1 - \beta},$$

$$A_3 = 2 (c_{N_2}/c_A)_{tr. L.},$$

$$A_4 = \frac{m}{1 + \frac{x}{4}} (c_{O_2}/c_A)_{tr. L.} + (c_{CO_2}/c_A)_{tr. L.}$$

Die Genauigkeit, mit der die Werte a , b , c , und d angegeben werden können, ist damit allein durch die Genauigkeit der Luftzusammensetzung begrenzt. Die Zusammensetzung eines Feuergases von Kohlenwasserstoff-Luftgemischen wird also gegeben durch die Variablen p und T (bzw. q und T), sowie durch die Parameter m (Mischungsverhältnis), x (Verhältnis der Wasserstoff- zu den Kohlenstoffatomen im Kohlenwasserstoffmolekül) und β (Feuchtigkeitsgrad der Luft); sie ist nicht abhängig von der Zahl n der Kohlenstoffatome C_n im Kohlenwasserstoffmolekül.

Das hier gezeigte Verfahren wurde als Grundlage für Kohlenwasserstoff-Luft-Verbrennungsrechnungen [18] verwendet, die zum Teil mit Handrechenmaschinen, zum Teil mit einer elektronischen Rechenanlage ausgeführt wurden.

Es ist den Verfassern eine angenehme Pflicht, dem Bundesverkehrsministerium für die Ermöglichung dieser Arbeit im Rahmen des Forschungsauftrages 58/55 zu danken, sowie den Leitern des Forschungsinstitutes für Physik der Strahlantriebe, Dr. Ing. E. SÄNGER und Dr. I. SÄNGER-BREDT, für die Betreuung mit der Durchführung und für die zahlreichen Anregungen während der Ausführung.

Literaturverzeichnis

1. G. DAMKÖHLER und R. EDSE, Z. Elektrochem. **49**, 178 (1943).
2. M. VON STEIN, Forsch. Geb. Ingenieurwes. **14**, 113 (1943).
3. G. RIBAUD et N. MANSON, Équilibres physico-chimiques et données thermodynamiques des melanges gazeux aux temperatures élevées. Publications Scientifiques et Techniques du Min. de l'Air, No. 294, Paris, 1954.
4. P. F. WINTERITZ, A Method for Calculating Simultaneous Homogeneous Gas Equilibria and Flame Temperatures. Third Symposium on Combustion and Flame and Explosion Phenomena. Baltimore: Williams & Wilkins Co., 1949.
5. G. F. SACHSEL, M. E. MANTIS and J. C. BELL, Calculation of the Composition of Multi-Component Propellant Gases. Third Symposium on Combustion and Flame and Explosion Phenomena. Baltimore: Williams & Wilkins Co., 1949.
6. H. TROITSCH, Calcul de la composition des gaz incandescents de la combustion d'un propergol et de la détente adiabatique des gaz. Arsenal de l'Aéronautique, E 5/221, Paris 1950.
7. H. REICHERT, Enthalpy Charts: For Dissociating Gas Mixtures in the Temperature Range 600° to 4000° K. Royal Aircraft Establishment, Techn. Note R.P.D. 35, Farnborough, 1950.
8. B. SALE, Nouvelle méthode graphique de calcul de la composition des gaz a haute température. Congrès du Chauffage Industriel, Paris, 1952.
9. R. VICHNIEVSKY, B. SALE and J. MARCADET, Jet Propulsion **25**, 105 (1955).

10. V. N. HUFF, S. GORDON and V. E. MORELL, General Method and Thermodynamic Tables for Computation of Equilibrium Composition and Temperature of Chemical Reactions. N.A.C.A. Rep. 1037, 1951.
11. S. R. BRINKLEY, JR., J. Chem. Physics **14**, 563, 686 (1946).
12. S. R. BRINKLEY, JR., J. Chem. Physics **15**, 107 (1947).
13. F. J. KRIEGER and W. B. WHITE, J. Chem. Physics **16**, 358 (1948).
14. P. MAGOT-CUVRU, Classification générale et résolution systématique des équilibres chimiques. Congrès International des Matériaux pour l'Aviation et les Projectiles Fusées, Paris (1955).
15. P. MAGOT-CUVRU, Méthode universelle de calcul de l'évolution physico-chimique des systèmes gazeux dissociables. Paris, 1956.
16. HURD (Director, EDPM Dept., IBM New York), Private Mitteilung, April 1956.
17. A. J. DONEGAN and M. FARBER, Solution of Thermochemical Propellant Calculations on a High-Speed Digital Computer. Jet Propulsion Laboratory, Ext. Publ. 287, Pasadena (1955).
18. H. J. KAEPPeler und G. BAUMANN, Zusammensetzung und thermodynamische Funktionen chemisch reagierender Feuergase von Kohlenwasserstoff-Luft-Gemischen. Mitt. Forsch.-Inst. Physik d. Strahlantriebe, Nr. 9. Stuttgart: Verlag Flugzeugtechnik — E. v. Olnhausen, 1957.
19. R. C. Tolman, The Principles of Statistical Mechanics. London: Oxford University Press, 1950.
20. J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS and R. B. BIRD, Molecular Theory of Gases and Liquids. New York: J. Wiley & Sons, Inc., 1954.
21. R. ZURMÜHL, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, S. 97. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1953.
22. A. G. GAYDON and H. G. WOLFARD, Flames. London: Chapman & Hall Ltd., 1953.

Chemische Analyse von in Tiefseesedimenten gefundenen mikroskopischen Kügelchen vermutlich kosmischen Ursprunges¹

Von

F. Hecht², ÖGfW, und R. Patzak²

(Eingegangen am 9. August 1956)

Zusammenfassung. In Sedimentproben roter Tiefseetone, die von der Schwedischen Tiefsee-Expedition (1947/48) im Pazifischen Ozean genommen wurden, finden sich zahlreiche, mikroskopisch kleine, magnetische Kügelchen aus Magnetit, teilweise mit Metallkern und Kruste aus Magnetit. Nach den von den Verfassern ausgeführten Mikroanalysen enthalten sie Eisen und Nickel in einem Verhältnis, wie es in den Eisenmeteoriten vorzuliegen pflegt. Auch Kobalt konnte nachgewiesen werden. Es wird daraus geschlossen, daß schon in der Tertiärzeit solche Kügelchen aus in die Lufthülle der Erde eintretenden Meteoriten in Form kleinster Schmelztröpfchen entstanden und durch Oxydation oberflächlich oder ganz in Magnetit übergingen. Bei Ausführung von Altersbestimmungen der betreffenden Tiefseesedimentschichten wäre eine statistische Frequenzbestimmung der Häufigkeit solcher meteoritischer Partikel im Jungtertiär möglich, woraus sich Schlüsse auf etwaige zeitliche Schwankungen des Einfanges solchen kosmischen Materials durch die Erde ziehen ließen.

Abstract. In deep-sea sediment cores of Red Clay, taken by the Swedish Deep-Sea Expedition in the Pacific Ocean during 1947/48, many microscopical magnetic spherules of magnetite were detected, which partially show a metallic core and a crust of magnetite. According to microanalyses which were carried out by the authors these spherules contain iron and nickel in a ratio similar to that usually found in iron meteorites. Also the element cobalt could be detected. From these analyses the authors conclude that already during the Tertiary Period of Time such spherules were formed as tiny droplets of molten iron-nickel alloy, originating from meteorites which entered the terrestrial atmosphere, and that these spherules were modified by oxidation, either superficially or completely, into magnetite. Carrying out age determinations of the corresponding layers of deep-sea sediments, one would be able to determine the statistical frequency of such meteoritic particles during the late Tertiary. Therefrom conclusions concerning temporal fluctuations of the capture of such cosmic material by the Earth should be possible.

Résumé. On trouve dans les échantillons de sédiments marins profonds, recueillis par l'expédition suédoise de 1947-48 dans l'Océan Pacifique, des sphérules microscopiques de magnétite, ou dont le noyau métallique est recouvert d'une croûte de magnétite. D'après les micro-analyses exécutées par les auteurs ils contiennent du fer et du nickel dans les proportions habituellement trouvées dans les météorites.

¹ Vorgetragen beim VII. Internationalen Astronautischen Kongreß in Rom, September 1956.

² Lehrkanzel für analytische Chemie, II. Chemisches Institut der Universität, Wien, IX., Währingerstraße 38, Österreich.

L'existence de cobalt a aussi pu être mise en évidence. On en conclut que, déjà dans l'ère tertiaire, des météorites pénétrant dans la pellicule atmosphérique de la terre ont donné naissance à des goutellettes de fusion qui, par oxydation superficielle, se sont transformées partiellement ou totalement en magnétite. Par une estimation de l'âge des couches sédimentaires en question il serait possible de procéder à une détermination statistique de l'abondance de ces particules durant la dernière partie du tertiaire. On pourrait en tirer des conclusions quant aux variations que subit dans le temps la capture de ces matières cosmiques par la Terre.

Im Jahre 1876 wurden von Sir JOHN MURRAY [1] winzige, magnetische Kügelchen beschrieben, die aus Tiefseesedimenten extrahiert worden waren, welche die „Challenger“-Expedition gesammelt hatte. Er bezeichnete sie als „cosmic spherules“ in der Annahme, daß es sich dabei um Partikel meteoritischen Ursprungs handle. Kürzlich berichteten BRUUN, LANGER und PAULY [2] über magnetische Partikel, die von der dänischen „Galathea“-Tiefseexpedition aus ähnlichen Sedimenten gewonnen worden waren.

Der Leiter der schwedischen Tiefsee-Expedition („Albatros“ 1947/48) Prof. HANS PETTERSSON beschreibt gleichfalls derartige magnetische Kügelchen aus Bohrkernen vom Grunde des Pazifischen Ozeans und des Mittelmeeres [3].

Von anderen Forschern, z. B. BUDDHUE [4], wurden ausgedehnte Untersuchungen vorgenommen, wobei atmosphärische Staubpartikel gesammelt wurden. Auch darin fanden sich neben einwandfrei terrestrischen Teilchen solche, die große Ähnlichkeit mit den erwähnten Tiefseekügelchen aufwiesen und, wie BUDDHUE ausführlich begründet, teilweise mit großer Wahrscheinlichkeit nichtterrestrischen Ursprungs sind.

Die magnetischen Kügelchen aus den Bohrkernen der schwedischen Tiefsee-Expedition wurden auf folgende Weise gewonnen [3]: Mit Bohrern von 90 mm Durchmesser wurden Kerne bis zu fast 6 m Länge erfaßt. Abschnitte von 6 bis 20 cm Länge (160 bis 600 g schwer) wurden aus den Kernen herausgeschnitten und jeweils 3/4 des Querschnittes verwendet. Das Sediment wurde nach dem Trocknen in einem Porzellanmörser ohne großen Druck gepulvert, um die magnetischen Partikel nicht zu zertrümmern. Dann wurden alle Teilchen mit Durchmessern von mehr als 250 μ herausgesiebt. Die Fraktion zwischen 0 und 250 μ wurde dreimal hintereinander mit Wasser gemischt durch einen elektromagnetischen Extraktor, der eine Batterie von 24 magnetischen Eisensieben enthielt, laufen gelassen. Die von den Sieben zurückgehaltenen Partikel wurden gesammelt und anschließend dreimal durch einen engen Trichter aus dünnem Kupferblech getrieben, der zwischen die Pole eines starken Elektromagneten gebracht worden war¹. Alle Partikel einer stark magnetischen Fraktion von 30 bis 60 μ Durchmesser wurden dann zur Zählung ausgesondert. Diese Fraktion enthielt die meisten Kügelchen. Die Zählungen wurden von K. FREDRIKSON (Stockholm) durchgeführt. Er fand drei verschiedene Arten magnetischer Partikel [3]:

- A. Schwarze sphärische Partikel, Oberfläche entweder hell oder dunkel;
- B. ebenfalls sphärische Partikel, schwarz mit rostartigen Flecken, gelegentlich braun, gelb oder grau, im allgemeinen mit metallischem Glanz;
- C. Fragmente des A-Typus oder nicht sphärische Partikel, ähnlich dem A- oder B-Typus.

Aus einem Bohrkern („Nr. 90“) aus dem westlichen Pazifik (03°21' südl. Breite, 174°12' östl. Länge), der in 4830 m Tiefe unter der Meeresoberfläche genommen worden war und in seinen oberen Teilen aus nahezu kalkfreiem „rotem Ton“ bestand, wurden Sektionen von 12 bis 20 cm Länge herausgeschnitten. Die Zahl der

¹ Zur Kontrolle der Wirksamkeit des Verfahrens wurden mit einem Sauerstoffgebläse künstlich aus Eisendraht Eisenkügelchen hergestellt und einem Sediment beigemischt.

Kügelchen vom A-Typus je kg Sediment variierte zwischen 1000 und 3000 im obersten Teil des Kernes (0 bis 111 cm). Zwischen 80 und 90 cm, von der Sedimentoberfläche gerechnet, fand sich ein Maximum von etwa 5000 Kügelchen je kg Sediment¹. In drei Sektionen aus größerer Tiefe (350 bis 500 cm) wurden viel niedrigere Zahlen mit einem sekundären Maximum zwischen 411 und 432 cm Abstand von oben gefunden. Die Zahl der Kügelchen vom B- und C-Typus ist im allgemeinen viel kleiner als die der A-Partikel.

FREDRIKSON [5] konnte zeigen, daß viele Kügelchen unter einer Oberfläche von Magnetit einen metallischen Kern enthalten, der, wie dies auch bei metallischem Eisen der Fall ist, saure Kupfersulfatlösungen zu metallischem Kupfer reduziert. In einigen Fällen besaß die den Metallkern umgebende Kruste dendritische Struktur, was nach FREDRIKSON auf eine Verfestigung aus dem schmelzflüssigen Zustand deutet. Solche Kügelchen mit metallischen Einschlüssen wurden auch von BUDDHUE [4] in atmosphärischem Staub nachgewiesen, die er begründeterweise für meteoritischen Ursprunges hielt. Ein etwaiger Einwand, die metallischen Tiefseekügelchen könnten künstlich-terrestrischer Herkunft sein, wird durch die Tatsache widerlegt, daß sie auch in metertiefen Schichten der Bohrkerne gefunden werden, die im Tertiär abgelagert worden sein müssen.

Von diesen Kügelchen gehen mehrere hundert bis mehrere tausend auf 1 mg. Ing. FREDRIKSON sandte uns im Auftrag von Prof. PETTERSSON dreimal Proben von jeweils mehreren Dutzend Kügelchen zur chemischen Analyse zu. In der ersten, ziemlich leicht in Salzsäure löslichen Probe, in der künstliche Kügelchen aus den in Fußnote 1, S. 48, erwähnten Kontrollversuchen vorhanden sein konnten, fanden wir kein Nickel. Da die uns zugesandten Kügelchen scheinbar weitgehend mit Magnetit überzogen waren, sich auch einzelne unregelmäßig gestaltete (eckige) Partikel darunter befanden und außerdem nicht alles Material mit Säure oder Kaliumpyrosulfataufschluß in Lösung gebracht werden konnte, war es nicht möglich, eine genaue Einwaage vorzunehmen. Wir bestimmten daher in der zweiten Probe das Verhältnis Fe : Ni : Co und kamen zu dem Ergebnis, daß etwa $50 \mu\text{g}$ Fe + Ni + Co für die Analyse in Lösung gebracht worden waren. Die größeren Partikel lösten sich in der Wärme in konz. Salzsäure. Das Ungelöste wurde in einem Platintiegel mit Kaliumpyrosulfat aufgeschlossen, ohne daß sich jedoch alles löste. Die saure Lösung der Schmelze wurde mit der ersten Lösung vereinigt. Es wurde ein Gewichtsverhältnis Fe : Ni : Co = 100 : 6 : 2,5 gefunden. Der Kobaltwert ist aber wegen relativ viel beigemengter Fremdstanz (K₂SO₄) als unsicher, wenngleich einem positiven Ergebnis entsprechend, zu bezeichnen. Das so gefundene Fe : Ni-Verhältnis kommt bei nickelarmen Eisenmeteoriten tatsächlich vor; allerdings ist der Kobaltwert in der Regel bloß ungefähr ein Zehntel des Nickelwertes. Der in Säure sowohl wie in Pyrosulfat unlösliche Rest löste sich schließlich bei stundenlangem Erwärmen mit konz. Salzsäure und Kaliumchlorat auf. In der so erhaltenen Lösung war jedoch kein Nickel nachweisbar. Diese Partikel waren also sicherlich nicht meteoritischen Ursprunges.

Eine dritte — äußerst kleine — Probe wurde in einem Platintiegel mit konz. Flußsäure, der ein wenig konz. Schwefelsäure und Natriumsulfit (zur Reduktion des Magnetits Fe₃O₄) zugesetzt worden war, behandelt. Nach Reoxydation der Probe ergab sich ein Gewichtsverhältnis Fe : Ni = 100 : 15, wie es in nickelreichen Eisenmeteoriten vorkommt. Da die in Lösung gegangene Gesamtmenge Substanz nur etwa $17 \mu\text{g}$ Metalle betrug, war es hier nicht möglich, auch eine Kobaltbestimmung auszuführen.

¹ Nach persönlicher Mitteilung von Prof. H. PETTERSSON.

Die Bestimmungen von Fe, Ni und Co wurden nach Auffüllen der Endlösung auf 10 ml mit Hilfe eines lichtelektrischen Photometers vorgenommen. Eisen wurde als Eisenthioeyanat, in der dritten Probe als 2,2'-Dipyridyleisenverbindung bestimmt, Nickel mit Dimethylglyoxim und Kobalt mit Nitroso-R-salz.

Die uns zur Verfügung stehenden Substanzmengen lagen an der Grenze derjenigen, bei denen eine quantitative mikrophotometrische Bestimmung noch möglich ist. Nichtsdestoweniger scheint uns auf Grund der erwähnten Befunde von FREDRIKSON (Metallkörner, magnetische Kruste) und unserer mikrochemischen Analysen (wahrscheinlich der ersten mit so geringen Substanzmengen ausgeführten quantitativen Analysen derartiger Kügelchen überhaupt) der Schluß auf die *kosmische Herkunft* der magnetischen Kügelchen als unausweichlich.

Für die Astronautik kann an diesen Untersuchungen folgendes von Interesse sein: Während der interplanetarische Staub aller Wahrscheinlichkeit nach von unregelmäßiger Gestalt ist, dürften die magnetischen Kügelchen von Eisenmeteoriten stammen, die in der Lufthülle der Erde durch die Reibung ins Glühen geraten, wobei kleinste Partikel durch die Luftströmung fortgerissen werden und infolge der Oberflächenspannung sich zu Schmelztröpfchen umformen, die sich dann in dieser Gestalt verfestigen und langsam zu Boden sinken. Es ist auch Sublimation nach Verdampfung und anschließende Tröpfchenbildung denkbar. Wenn es nun möglich wäre, Altersbestimmungen der Tiefseesedimentschichten auszuführen, so könnten daraus relative Frequenzen solcher meteoritischer Partikel über größere Zeiträume der Vergangenheit der Erde abgeleitet werden [3]. Solche Altersbestimmungsmethoden sind in Ausarbeitung begriffen. Aus Untersuchungen von KRÖLL [6] am Ozeanografiska Institutet in Göteborg geht hervor, daß die roten Tiefseetone im zentralen Pazifischen Ozean mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von rund 1 mm/1000 Jahre abgelagert werden, wenngleich die Sedimentationsgeschwindigkeit starken zeitlichen Änderungen unterlegen haben muß. Die dabei angewandte sogenannte Ionium-Radium-Methode erlaubt jedoch solche Messungen nur bis zu etwa 400 000 Jahren, von der Gegenwart zurückgerechnet (Halbwertszeit des Ioniums = 83 000 Jahre). In den noch älteren Sedimentschichten stammt das Radium praktisch nicht mehr aus dem *am Meeresboden* ausgefällten Ionium, klingt daher nicht mehr mit dem Mutterelement Ionium ab, sondern bildet sich aus dem in den Sedimenten enthaltenen Uran, wie aus den Untersuchungen von KRÖLL [6] sowie HECHT und Mitarbeitern [7] hervorgeht. Eine im Forschungsstadium befindliche neuartige Methode von B. PETERS, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, [8], die sich auf die Messung des durch kosmische Strahlung in der oberen Atmosphäre entstehenden radioaktiven ^{10}Be (Halbwertszeit 2,7 Millionen Jahre) stützt, das natürlich auch in den Tiefseesedimenten abgelagert wird, würde jedoch Bestimmungen des Alters von Sedimentschichten bis zu 10, wenn nicht 20 Millionen Jahren ermöglichen.

Wie dem auch sei, jedenfalls scheint uns im Sinne von PETTERSSON [3] der Nachweis gelungen, daß schon in mehrere Jahrmillionen alten Tiefseesedimenten Material meteoritischer Herkunft abgelagert worden ist¹, daß also das Auftreten von Meteoriten in der Gegenwart keineswegs auf ein nur innerhalb der letzten Jahrtausende erfolgendes Passieren des Sonnensystems durch eine kosmische Dunkelwolke zurückzuführen ist. Die Zeitgrenze solcher Nachweise bis in die geologische Vergangenheit zurück ist heute nur durch die Länge der gewinnbaren Bohrkerne gegeben.

¹ In Kohlen wurden bisher nie „fossile“ Meteoriten aufgefunden; vielleicht geht dies auf Verwitterungserscheinungen zurück.

Für das IGY wurde die Einsammlung und Untersuchung des heute auf die Erde einfallenden meteoritischen Staubes vorgeschlagen (H. PETTERSSON). Wenn es gelänge, die Brücke zwischen genauen quantitativen Feststellungen in der Gegenwart und den Bestimmungen für die Vergangenheit mit Hilfe der Tiefseesedimente zu schlagen, so wären Vorstellungen über die Größenordnung der absoluten Häufigkeit des auf die Erde einfallenden meteoritischen Materials und über ihre möglichen Schwankungen auf einer gesicherteren Basis erreichbar, als dies heute der Fall ist.

Literaturverzeichnis

1. J. MURRAY, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **9**, 285 (1876); J. MURRAY und A. F. RENARD, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **12**, 474 (1883); Report of the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. Challenger during the Years 1873–1876; Deep Sea Deposits, S. 327–336 (1891).
2. A. F. BRUUN, E. LANGER und H. PAULY, Deep-Sea Research **2**, 230 (1955).
3. H. PETTERSSON, Festschrift für T. E. BROSTRÖM, Göteborg, 1955; derselbe, Naturwiss. **42**, 387 (1955).
4. J. D. BUDDHUE, Meteoritic Dust. Albuquerque: University of New Mexico Press, 1950.
5. K. FREDRIKSON, Nature **177**, 32 (1956).
6. V. KRÖLL, Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition, Band X. Göteborg. Elanders Boktryckeri Aktiebolag.
7. E. HAHOFER und F. HECHT, Mikrochim. Acta (Wien) **1954**, 417; F. HECHT und E. TOMIC, Unveröffentlichte Ergebnisse; E. TOMIC, Dissertation, Universität Wien, 1955; vgl. H. PETTERSSON, The Ocean Floor, S. 122. New Haven: Yale University Press, 1954.
8. P. S. GOEL, D. P. KHARKAR, D. LAL, N. NARSAPPAYA, B. PETERS und V. YATIRAJAM, Geochim. Cosmochim. Acta (im Druck).

Metodo fotografico per la determinazione della resistenza aerodinamica di missili in volo

di

C. E. Cremona¹, AIR

(Con 4 figure)

(Arrivato 6 gennaio 1956)

Zusammenfassung. Es wird eine Methode für die Bestimmung des aerodynamischen Widerstandes eines fliegenden Geschosses dargelegt, die sich auf den Vergleich einiger Bahnparameter gründet, die mit optischen und optisch-elektronischen Methoden errechnet werden können, und entsprechender Parameter, die zu Gruppen theoretisch ermittelter Geschosßbahnen gehören. Die Koinzidenz unter ihnen legt die berechnete Bahn fest auf Grundlage eines angenommenen Wertes des aerodynamischen Widerstandes, und damit auf Grund der Bestimmung des Gesetzes der Änderung des aerodynamischen Widerstandskoeffizienten. Die optischen und optisch-elektronischen Verfahren sind folgende:

(a) *Die Bewegung entlang des Startschlittens.* Zwei photoelektrische Zellen befinden sich am Anfang und am Ende des Schlittens. Hinter einem Schlitz wird ein optisches Beobachtungsgerät angebracht. Das Zeitintervall zwischen dem Beginn der Verdunkelung der beiden Schlitzes wird mit einem elektronischen Meßgerät ermittelt, das $1/200.000$ sec messen kann.

(b) *Die Geschwindigkeit am Ende des Startschlittens.* Die Arbeit beschreibt einen optisch-elektronischen Apparat zur Bestimmung der Laufdauer der Rakete auf dem Schlitten und ihrer an dessen Ende erreichten Geschwindigkeit.

(c) *Die Bahn während des Antriebes durch die Verbrennung.* In den praktischen Fällen, die in Betracht gezogen wurden, ist diese Phase der Bewegung des Geschosses von der Größenordnung einiger hundert Meter. Es wird eine besondere photographische Methode angewendet, die von dem Verfasser in einer dem IAF-Kongreß in Innsbruck vorgelegten Arbeit veröffentlicht worden ist [5]. Diese sogenannte orthosymmetrische Methode benützt zwei photographische Platten, die in zwei aufeinander senkrechten Ebenen angebracht sind, anstatt wie üblich in zwei parallelen Ebenen.

(d) *Der Einschlagpunkt des Geschosses.* Zur Bestimmung dieses Punktes werden drei photogrammetrische Stationen benützt. Für die Bestimmung der Einschlagpunkte verschiedener, nacheinander abgefeuerter Geschosse kann dieselbe photographische Platte verwendet werden, indem sie jedesmal durch einen besonderen Mechanismus um einen konstanten Betrag verschoben wird.

Die Geräte zur Aufzeichnung der Phasen (a), (b) und (d) wurden von der Firma „Officine Galileo“ in Florenz geliefert.

Außer diesen experimentellen Erprobungen wurde die Berechnung einer Gruppe ballistischer Bahnen für dieselben Geschosse ausgeführt. Dabei wurde ein besonderes Integrationsverfahren unter Gebrauch der wohl bekannten Differentialgleichungen der ballistischen Bewegung eines Geschosses angewendet. Dieses Verfahren wurde von Dr. BONI beigestellt. Es ist in einem Anhang zur vorliegenden Arbeit beschrieben. Dr. BONI schlug auch eine spezielle Formel für die Bestimmung des aerodynamischen Widerstandskoeffizienten C_D vor.

¹ Direttore dell'Istituto di Balistica dell'Università di Roma, Italia.

Der Vergleich zwischen den experimentellen Ergebnissen und jenen, die durch die Integration der Bewegungsgleichungen erhalten wurden, fällt sehr befriedigend aus, so daß das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren sehr nützlich für die Erweiterung der Kenntnis der Werte des aerodynamischen Widerstandskoeffizienten C_D ist.

Abstract. The paper describes a method for determining the aerodynamic drag of a flying missile. This method is based upon the comparison of some parameters of the trajectory that can be calculated by optical and optical-electronic methods, and the corresponding parameters belonging to families of missile trajectories that have been determined theoretically. The coincidence of these parameters settles the calculated trajectory upon the basis of a supposed value of the aerodynamic drag, i.e. by determining the law of variation of the coefficient of the aerodynamic drag. The optical and optical-electronic methods are the following ones:

(a) *The motion along the launching rail.* Two photoelectric cells are installed at the beginning and the end of the rail. Behind a slot an optical observation device is employed. The time interval between the beginning of the darkening of the two slots is measured by an electronic device that is able to measure $1/200,000$ of a second.

(b) *The velocity at the end of the rail.* The paper describes an optical-electronic device for determining the time interval needed by the rocket on the rail, and for the measurement of the velocity which is attained at the end of the rail.

(c) *The path during the combustion.* In the practical cases considered here this phase of the motion of the missile is of an order of magnitude of some hundred meters. A particular photogrammetric method which has been illustrated by the author in a paper delivered at the Innsbruck Congress of the I.A.F. in 1954, published in the Proceedings of this Congress [5], is employed. This method — the so-called ortho-symmetric method — uses two photographic plates, that are placed in two perpendicular planes, and not in two parallel planes as usually.

(d) *The point of impact of the missile.* In order to determine this point three photogrammetric stations are employed. The same photographic plate can be used for the determination of the points of impact for different missiles which have successively been launched, the plate being displaced each time by a constant amount through a particular device.

The equipment for recording the phases (a), (b), and (d) have been supplied by "Officine Galileo" at Florence.

In addition to these experimental tests the calculation of a family of ballistic paths for the same missiles was performed, using a particular method of integration of the well known differential equations of the ballistic motion of a missile. This method was applied by Dr. BONI. It is described in an appendix to this paper. Dr. BONI has proposed also a particular formula for determining the aerodynamic drag coefficient C_D .

Comparison between the experimentally obtained results and those obtained by integration of the equations of motion is very satisfactory, so that the method described here can be very useful for improving the knowledge of the values of the aerodynamic drag coefficient C_D .

Résumé. L'article décrit une méthode pour la détermination de la traînée aérodynamique d'un engin. Elle est basée sur une comparaison entre (1) certains paramètres de la trajectoire calculables à partir d'observations optiques ou optiques-électroniques et (2) les paramètres pour des familles de trajectoires calculées théoriquement. La coincidence des paramètres classe la trajectoire calculée sur la base des valeurs adoptées pour la traînée aérodynamique, c'est à dire par la détermination de la règle de variation du coefficient de traînée. Les méthodes optiques et optiques-électroniques sont les suivantes:

(a) *Mouvement le long de la rampe de lancement.* Deux cellules photoélectriques sont installées aux extrémités de la rampe. L'observation optique se fait derrière une fente. L'intervalle de temps entre l'obturation des fentes est mesuré par un dispositif électronique avec une précision de 5 microsecondes.

(b) *Vitesse a l'extrémité de la rampe.* L'article décrit le dispositif électronique-optique mesurant l'intervalle de temps pour le parcours de la rampe et la mesure de la vitesse atteinte par la fusée à son extrémité.

(c) *Trajectoire pendant la phase de combustion.* Dans les cas pratiques envisagés cette phase comporte une longueur de trajectoire de quelques centaines de mètres. Une méthode photogrammétrique spéciale, illustrée par l'auteur dans une communication au congrès de l'I.A.F. à Innsbruck en 1954 et publiée dans ses comptes rendus, [5], est mise en application. Cette méthode, dite "orthosymétrique", utilise deux plaques photographiques placées dans des plans perpendiculaires et non parallèles comme on le fait usuellement.

(d) *Point d'impact de l'engin.* Il est déterminé à l'aide de trois stations photogrammétriques. La même plaque photographique peut servir à la détermination des points d'impact de différents engins. Elle est alors déplacée chaque fois d'une certaine quantité par un dispositif spécial.

L'équipement nécessaire aux phases (a), (b) et (d) a été fourni par l'"Officine Galileo" de Florence.

Outre ces essais, le calcul d'une famille de trajectoires balistiques a été fait par une méthode spéciale d'intégration des équations différentielles classiques, pour le même type d'engin. La méthode a été appliquée par le Dr. BONI. Elle est décrite en appendice. Le Dr. BONI a également proposé une formule spéciale pour la détermination du coefficient de traînée expérimental C_D .

La comparaison des résultats expérimentaux et des calculs d'intégration est très satisfaisante; aussi la méthode décrite est-elle utile pour améliorer notre connaissance du coefficient de traînée C_D .

1. Premessa

I metodi che l'aerodinamica sperimentale fornisce per la determinazione della resistenza aerodinamica di mobili balistici (razzi, missili o modelli in scala) sono di due specie e precisamente:

- le gallerie aerodinamiche
- le telemisure.

Entrambi questi metodi, però, richiedono impianti molto costosi sia come installazioni che come esercizio.

Si espone, in questa memoria, un metodo pratico ed economico, per quanto approssimato, per la determinazione della legge di variazione del coefficiente adimensionale di resistenza unitaria media (tenuto conto, cioè, delle oscillazioni dell'asse del missile intorno alla velocità istantanea) in funzione del numero di MACH relativo alla quota di navigazione.

Il metodo si ricollega a quello che circa un secolo or sono venne impiegato dagli artiglieri balistici.

2. Simboli impiegati

Siano:

- t = tempo
- t_c = durata di combustione
- Q = peso del mobile
- Q_i = peso del mobile al tempo $t = 0$
- Q_f = peso del mobile al tempo $t = t_c$
- g = accelerazione di gravità
- g^* = valore di riferimento di g
- g_1 = valore locale di g
- m = Q/g = massa del mobile
- z = quota (coordinata secondo la verticale con origine sul livello del mare)

- ρ = densità dell'aria
 ρ_0 = densità dell'aria a quota zero
 $\delta(z) = \rho/\rho_0$ = densità relativa alle varie quote
 $2c$ = diametro della sezione maestra del missile (calibro)
 $S = \pi c^2$ = superficie di riferimento (arbitrario) corrispondente
 $T(t) = T$ = spinta del propulsore
 $T = T_0$ = spinta per $0 \leq t \leq t_c$
 $T = 0$ = spinta per $t > t_c$
 R = resistenza aerodinamica
 $V = V(t)$ = velocità del mobile
 \dot{z} = componente verticale della velocità V
 \dot{x} = componente orizzontale della velocità V
 V_c = velocità del mobile per $t = t_c$
 V_l = velocità del mobile all'uscita dalla slitta
 $V_s = V_s(Z)$ = velocità del suono alla quota z
 β_0 = angolo di rampa della slitta
 β_c = angolo di rampa della velocità alla fine della combustione

3. Metodo

Sia (fig. 1) C la traiettoria percorsa da un mobile balistico lanciato dalla slitta l sotto l'effetto della spinta $T(t)$.

Una tale traiettoria sarà caratterizzata dai valori V_l (fine slitta) e V_c (fine combustione); dall'angolo iniziale di rampa β_0 della slitta; dall'angolo di rampa β_c alla fine della combustione; dalle coordinate x_c ed z_c ; dagli intervalli di tempo t_l e t_c ; dal tempo totale t_t ; dalla ascissa totale x_t e quindi dal punto di caduta A del mobile.

Una traiettoria del genere risulta inoltre caratterizzata dal fatto che il mobile partendo da velocità nulla raggiunge il campo di velocità transonico e lo supera, generalmente, prima della fine della combustione. Successivamente esso decelera per ripercorrere all'inverso il cammino della velocità ripassando attraverso una buona parte del campo transonico.

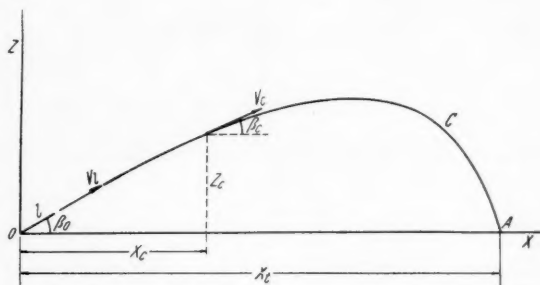


Fig. 1

Il metodo consiste nel paragonare i dati suddetti rilevati durante un lancio del mobile (o di un suo modello in scala di similitudine dinamica) con quelli di una traiettoria ricavata per calcolo sulla base dell'assunzione di alcuni valori probatori delle caratteristiche aerodinamiche di resistenza del mobile stesso.

L'equazione del moto, infatti, può scriversi:

$$m(t)\ddot{x} + R(M)\cos\beta - T(t)\cos\beta = 0$$

$$m(t)\ddot{z} + R(M)\sin\beta - T(t)\sin\beta + m(t)g = 0$$

nelle quali:

$$m = \frac{Q_i}{g} (1 - \alpha t) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq t_c$$

$$m = \frac{Q_f}{g} \quad \text{per} \quad t \geq t_c$$

ed è generalmente nota la funzione $T(t)$ per $0 \leq t \leq t_c$ della spinta di propulsione.

La funzione $R(M)$ può essere espressa con:

$$R(M) = C_{r0} K(M) \rho S V^2$$

nella quale C_{r0} è il valore del coefficiente aerodinamico di resistenza per numero di MACH nullo e

$$K(M) = \frac{C_r(M)}{C_{r0}}$$



Fig. 2

MAJEVSKY etc.) od altre che possono dedursi dal confronto con altre funzioni note o ricavate teoricamente le quali contengono coefficienti dipendenti dalla forma del corpo.

Opportunamente variando (fig. 2) entro limiti razionali i valori del coefficiente C_{r0} e quelli (o quello) della funzione $K(M)$ si può tracciare una famiglia di traiettorie caratterizzate ciascuna da una serie di valori di essi.

Interpolando, nella famiglia, la traiettoria rilevata sperimentalmente, si potranno definire i valori dei coefficienti e calcolare quindi la legge della resistenza aerodinamica corrispondente.

4. Apparat per il rilievo della traiettoria

Per il rilevamento delle caratteristiche della traiettoria sperimentale sono stati impiegati i seguenti apparati:

a) Moto lungo la slitta

Durante il moto lungo la slitta interessa rilevare il tempo t_i impiegato dal mobile dalla partenza fino all'uscita dalla slitta stessa. Per queste misure si può impiegare una apparecchiatura del tipo „Officine Galileo“ mod. AV/1 il cui principio di funzionamento è basato su di un obiettivo munito di diaframma opaco, posto nel piano focale, con due strette fenditure trasparenti, diretto perpendicolarmente al piano verticale contenente la slitta in modo che la prima fenditura sia diretta immediatamente avanti al mobile fermo sulla slitta e la seconda al termine di essa.

L'immagine del mobile che compare sulla prima fenditura agisce su una cella fotoelettrica la cui variazione di flusso, opportunamente manipolata, dà inizio al funzionamento di un contatore. Questo seguita a contare in duecentomillesimi di secondo fin quando il mobile passa attraverso la seconda fenditura. Questo passaggio eccita una seconda cella foto-elettrica che blocca il funzionamento del contatore.

b) Moto iniziale

Una volta abbandonata la slitta il mobile sarà animato da una velocità iniziale V_i che potrà essere determinata con una seconda apparecchiatura simile alla precedente essendo

$$V_i = \frac{dXf}{nF}$$

nella quale d è la distanza dalla traiettoria del punto nodale anteriore dell'obiettivo; X la distanza fra le due fenditure; F la focale convenzionale dell'obiettivo; n il numero degli impulsi registrato ed f la frequenza dell'oscillatore locale.

c) Traiettoria durante la combustione

La traiettoria durante la combustione potrà essere rilevata mediante uno dei metodi noti. Segnaliamo quello *ortho-simmetrico* da noi presentato nei lavori del Congresso dell'I.A.F. del 1954 [5] che meglio si presta a tali rilievi. Durante la ripresa delle traiettorie si avrà cura di oscurare, con opportuni diaframmi opachi, la prima parte della traiettoria relativa al moto lungo la slitta fino al passaggio del mobile davanti la seconda fenditura della seconda apparecchiatura di cui la comma b).

Il rilevamento fornirà, oltre le caratteristiche geometriche spaziali della traiettoria: l'orientamento della velocità iniziale; il valore dei suoi incrementi fino al valore massimo V_c alla fine della combustione; la quota e la distanza dall'origine del moto; l'orientamento delle velocità; il tempo t_c impiegato etc.

d) Punto di caduta

L'apparecchiatura per il rilievo dei punti di caduta può essere costituita da tre postazioni fotogoniometriche del tipo „Officine Galileo“ mod. „D.G.A.M.“ che sono costituite da una camera fotografica munita di obiettivo grandangolare „Aerogon“ poggiata su un basamento contenente il cerchio azimutale.

La sede dello schiassis porta-lastre è realizzata in modo che il piano della lastra venga premuto contro quattro piedini che localizzano il piano focale.

Ogni postazione è munita di un monocolo che permette il puntamento reciproco delle postazioni o su falsi scopi e, ruotando con l'alidada, può compiere una escursione secondo un piano verticale. Il monocolo è provvisto di un reticolo a crocicchio — con branche autoluminose per le operazioni notturne — rettificato rispetto all'asse ottico dell'obiettivo. Sulla forcilla di supporto del monocolo è applicata una mira luminosa per il puntamento reciproco. Nel corpo della camera è inserito un sistema ottico che permette di effettuare sulla lastra fotografica la registrazione di quattro posizioni angolari del cerchio azimutale corrispondenti a quattro puntamenti di riferimento.

Ai bordi del formato della camera, nella mezzeria dei lati sono sistemati quattro riferimenti ottici costituiti da vetrini incisi a crocicchio ed illuminati posteriormente da altrettanti lampadini.

Il punto d'intersezione delle congiungenti degli opposti riferimenti coincide con la intersezione dell'asse ottico con il piano focale.

Il modello „D.G.A.M.“ presenta la particolarità che la piastra anteriore porta-obiettivo è scorrevole entro una coulisse verticale a mezzo di una vite a passo rapido manovrabile con bottone. In tal modo l'obiettivo può assumere cinque posizioni che un fermo a sfera rende distanziate 10 millimetri l'una

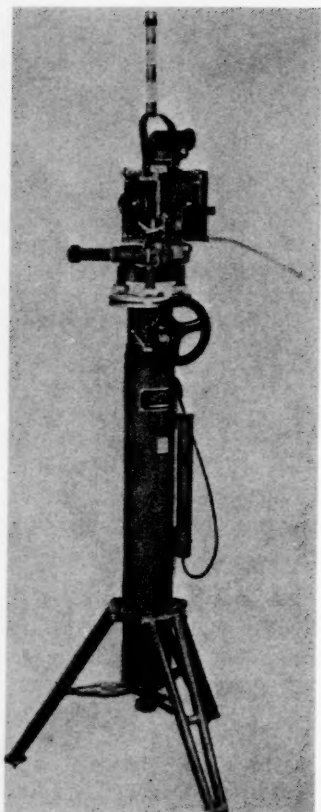


Fig. 3

dall'altra. Tale dispositivo permette di eseguire cinque rilievi di punti di caduta sulla stessa lastra.

Predisponendo l'orientazione delle camere verso il presunto punto di caduta, sarà facile, per triangolazione duplice spaziale (in presenza di dislivello fra le camere ed il punto di caduta), rilevare e controllare le coordinate del punto suddetto riferite agli assi presi come riferimento.

La fig. 3 mostra una vista dell'apparecchiatura montata su cavalletto campale a colonna regolabile in altezza.

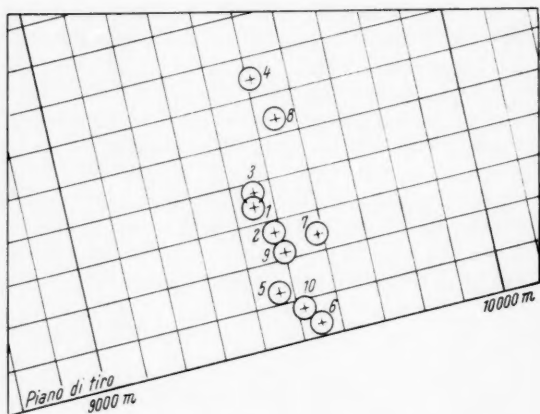


Fig. 4. Tiri con razzi tipo R 1/80; coordinate punti di caduta. $\vartheta = 45^\circ$, $V_c = 773$ m/sec

5. Applicazione del metodo

Una volta in possesso dei dati relativi alla prima parte della traiettoria (traiettoria di combustione) e del punto di caduta si inseriscono questi nella famiglia di traiettorie calcolate sulla base della legge teorica di variazione del coefficiente di resistenza aerodinamica di vari numeri di MACH.

Si potrà così ricavare per interpolazione, come si è detto, quella relativa al tipo di mobile in esame.

Nel caso si operi con modelli sarà necessario munirli di propulsore tale che esso imprima al modello una V_c contenuta nell'intervallo adottato nella compilazione della famiglia calcolata e si terrà conto, ove necessario, della correzione da apportare per il differente numero di REYNOLDS.

In appendice verrà riportato un esempio pratico di applicazione del metodo esposto ed in fig. 4 un esempio di rilievo sperimentale di punti di caduta di una serie di lanci eseguiti con razzi di uguali caratteristiche alle stesse condizioni iniziali.

Alleg. 1. Argomento delle tavole e valori dei parametri

Simboli per le unità: m = metro, s = secondo, kgf = chilogrammo-forza, kgm = chilogrammo-massa.

1. Le presenti tavole hanno per oggetto la determinazione analitica del moto di un razzo per variabili condizioni iniziali di lancio e per variazioni nei supposti coefficienti di resistenza aerodinamica del razzo tipo, al fine di precisare i valori dei detti coefficienti, istituendo un confronto coi risultati sperimentali.

2. Caratteristiche del razzo considerato:

$$d_R = 0,08 \text{ m} = \text{diametro equivalente del razzo.} \quad (2.1)$$

$$p_R = 6,4 \text{ kgf} = \text{peso del razzo.} \quad (2.2)$$

3. Condizioni iniziali di riferimento ($t = 0$):

$$y_0 = 300 \text{ m} = \text{quota.} \quad (3.1)$$

$$V = 750 \text{ m/s} = \text{velocità.} \quad (3.2)$$

$$\theta_0 = 45^\circ = \text{inclinazione.} \quad (3.3)$$

4. Valore presunto $c_{r,0,p}$, del coefficiente di resistenza $c_{r,0}$ per velocità nulla:

$$c_{r,0,p} = 0,08.$$

5. Il parametro di resistenza B , che diremo „primo parametro di resistenza“, (Cfr. „Procedimento dei calcoli“, Alleg. 2), ha l'espressione:

$$B = c_{r,0} S \delta_{i,0} g_p / p_R, \quad (\text{m}^{-1})$$

dove:

$$S = \pi d_R^2 / 4 = 0,502 \, 655 \times 10^{-2} \text{ m}^2 = \text{sezione.} \quad (5.1)$$

$$\delta_{i,0} = 0,124 \, 92 \text{ kgf s}^2 \text{ m}^{-4} = \text{densità a quota } 0 \quad (5.2)$$

dell'aria-tipo I.C.A.O. (Cfr. Alleg. 3).

$g_p = 9,806 \, 65 \text{ m s}^{-2}$ = valore della accelerazione di gravità convenzionale (a Parigi, Ufficio Intern. di Pes e Mis.), per il quale si presume tarata la pesiera che dà p_R .
(5.3)

Assumendo il valore presunto di $c_{r,0}$ indicato al precedente No. 4, si ha di conseguenza un valore presunto B_p di B :

$$B_p = \sim 77,0 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}. \quad (5.4)$$

6. Il valore del parametro di resistenza P , che diremo „secondo parametro di resistenza“, (Cfr. „Calcolo di $K_1(M)$ e $K_2(M)$, Alleg. 5“), presenta le maggiori incertezze, a motivo della mancanza di prove sperimentali su razzi consimili; un valore presunto è:

$$P_s = 0,8.$$

7. I coefficienti differenziali di interpolazione, occorrenti per riportare alle stesse condizioni di riferimento i valori misurati per le traiettorie, durante le prove sperimentali, praticamente effettuate in condizioni varie, si otterranno calcolando un certo numero di traiettorie, corrispondenti a opportuni gruppi di valori dei parametri, in modo particolare V , B , P , ai quali si possono in gran parte ricondurre altre variazioni.

I gruppi di valori considerati sono i seguenti, distinti con un „Numero di serie“, da No. 01 a 06, e da un „No. caratteristico“:

N° di serie	V	$B \times 10^6$	P	N° caratter.
01	750	80	0,8	750/80/0,8
02	730	80	0,8	730/80/0,8
03	770	80	0,8	770/80/0,8
04	750	75	0,8	750/75/0,8
05	750	80	0,9	750/80/0,9
06	750	80	1,0	750/80/1,0

8. In questa prima fase di ricerche si suppone che il razzo si mantenga col suo asse tangente alla traiett., escludendo forze aerod. trasversali.

Alleg. 2. Procedimento dei calcoli

1. Costanti assegnate: $\gamma_0, \theta_0, V, B, P$ (Cfr. Alleg. 1).

2. Funzioni date da tabelle: $\delta_{i,r}(H), 1/v_{i,s}(H)$. Precisione in valore relativo: $1/10^6$.

3. Equazioni differenziali per il calcolo di $x(t), y(t)$:

$$\ddot{x}(t) = -b(v, b) K_P(M) \dot{x}(t) \quad \text{m s}^{-2} \quad (3.1)$$

$$\ddot{y}(t) = -b(v, y) K_P(M) \dot{y}(t) - g_R, \quad (3.2)$$

$g_R = 9,804 \text{ m s}^{-2}$ = accelerazione di gravità a Roma.
(Caso di sole forze aerodinamiche di resistenza.)

4. Frequenza resistente, $b(v, y)$:

$$b(v, y) = B \delta_{i,r}(y) v, \quad \text{s}^{-1}. \quad (4.1)$$

La $\delta_{i,r}$ è data nelle tabelle in funzione del geopotenziale (specifico) H :

$$H = y g_R / G \quad \text{m}^2 \text{s}^{-2}, \quad G = 9,806 \text{ 65}. \quad (4.2)$$

5. Funzione di resistenza, $K_P(M)$:

$$K_P(M) = K_1(M) + P K_2(M), \quad (5.1)$$

dove il calcolo delle funzioni $K_1(M), K_2(M)$ è indicato nell'Alleg. 5.

6. Numero di MACH, $M(v, y)$:

$$M(v, y) = v / v_{i,s}(y). \quad (6.1)$$

La $1/v_{i,s}$ è data in funzione di H da tabelle (Cfr. Alleg. 4).

7. Velocità, v :

$$v(t) = \{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2\}^{1/2}, \quad \text{m s}^{-1}. \quad (7.1)$$

Per il calcolo si può impiegare la formula attiva:

$$v_{r+1} = v_r + (v^2 - v_r^2)/2 v_1, \quad (7.2)$$

dove v_1 è un valore di prima approssimazione di v_r , per $r = 1$.

8. Pendenza, $\tan \theta$:

$$\tan \theta(t) = \dot{y}(t) / \dot{x}(t). \quad (8.1)$$

Nelle tavole delle traiettorie si è riportato invece dell'angolo la sua tangente.

9. Valori di \dot{x} e \dot{y} in funzione di v, θ :

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos \theta(t) \quad (9.1)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) \sin \theta(t), \quad (9.2)$$

da applicarsi in particolare per $t = 0$.

10. Condizioni iniziali:

$$x(0) = 0; \quad y(0) = y_0; \quad v(0) = V; \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (10.1, 2, 3, 4)$$

11. Sviluppi di TAYLOR per il calcolo dei passi successivi:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (\Delta t) \dot{x}(t) + (\Delta t)^2 \ddot{x}(t)/2 + (\Delta t)^3 \dddot{x}(t)/6 \quad (11.1)$$

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + (\Delta t) \ddot{x}(t) + (\Delta t)^2 \dddot{x}(t)/2, \quad (11.2)$$

dove si assume con approssimazione:

$$\ddot{x}(t) = [\ddot{x}(t) - \ddot{x}(t - \Delta t)] / \Delta t. \quad (11.3)$$

Analogamente per y, \dot{y}, \ddot{y} .

La (11.3) non è applicabile per $t = 0$, perciò all'estremo del primo passo si calcoleranno le (11.1), (11.2) senza l'ultimo termine, compensando l'errore con l'assumere un valore adeguatamente piccolo per il primo passo (Cfr. il seguente Alleg. 3).

Alleg. 3. Precisione dei valori e numero dei passi

La precisione che si ottiene nei valori finali della traiettoria dipende essenzialmente dalla successione di ampiezze adottate per i vari passi, e di conseguenza dal loro numero.

Tuttavia per non accrescere tale errore a causa del successivo amplificarsi degli effetti di scarsa approssimazione, durante le molteplici iterazioni, si è usato opportunamente un numero sia pure esuberante di cifre significative per i valori durante i calcoli, lasciando un minimo di 5 cifre significative soltanto per i valori ricavati per interpolazione da tabelle, la cui precisione non era superiore.

Indichiamo il numero di decimali adoperati per le diverse variabili.

$$\begin{array}{cccccccccccc} x(t), & y(t), & \dot{x}(t), & \dot{y}(t), & \tan \theta, & v(t), & M, & K_P(M), & \ddot{x}, & \ddot{y}, & \ddot{x}, & \ddot{y}. \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 \end{array}$$

Valori ausiliari di funzioni occorsi nei calcoli, ma non riportati nelle tavole delle traiettorie allegate, sono stati calcolati col numero di decimali come sotto indicato:

$$\begin{array}{ccccccc} H(y), & \delta_{i,r}(H), & 10^3/v_{i,s}(H), & b(v, y), & K_1(M), & K_2(M), & b K_P. \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 5 & 5 & 7 \end{array}$$

Per ottenere la richiesta precisione di $\pm 0,03\%$ sui valori finali della traiettoria sono stati adottati i seguenti valori dei passi Δt di integrazione con riferimento sia a precedenti che ad attuali esperienze di calcolo:

$$\begin{array}{ll} \Delta t = 0,05 & \text{s per } 0 \leq t \leq 0,01 \\ \Delta t = 0,1 & 0,1 < t \leq 0,2 \\ \Delta t = 0,2 & 0,2 < t \leq 1,0 \\ \Delta t = 0,5 & 1,0 < t \leq 5,0 \\ \Delta t = 1 & 5,0 < t \leq 24 \\ \Delta t = 2 & t > 24. \end{array}$$

Alleg. 4. Calcoli di $\delta_{i,r}(H)$ e di $i/v_{i,s}(H)$

La funzione $\delta_{i,r}(H)$ rappresenta al variare del geopotenziale H (in $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$) la densità relativa dell'aria-tipo I.C.A.O. (International Civil Aviation Organization, Doc. 7041, sept. 1950) secondo la formula, valida per la troposfera ($H \leq 11\,000 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}$):

$$\delta_{i,r}(H) = (T/T_0)^n - 1, \quad (1)$$

dove:

$$T_0 = 288,16 \text{ }^\circ\text{K} \quad (2)$$

$$T(H) = T_0 - 0,0065 H \quad (3)$$

$$n = 5,2561. \quad (4)$$

Il geopotenziale H si esprime in funzione della quota y (in m) sul livello medio del mare, mediante la formula:

$$H = y g/G \quad \text{m}^2 \text{s}^{-2}, \quad (5)$$

dove:

$$g = \text{accelerazione del luogo (a Roma: } g = g_R = 9,804 \text{ m s}^{-2}) \quad (6)$$

$$G = 9,806\,65, \quad g_R/G = 0,999\,730. \quad (7)$$

La funzione $1/v_{i,s}(H)$ rappresenta al variare di H l'inverso (m^{-1}s) della velocità $v_{i,s}(H)$ del suono nella detta aria-tipo I.C.A.O.:

$$1/v_{i,s}(H) = (T_0/T)^{1/2}/v_{i,s,0}, \quad (8)$$

dove:

$$v_{i,s,0} = 340,43 \text{ (m s}^{-1}) = \text{velocità del suono per } y = 0. \quad (9)$$

Per $H \geq 11\,000 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}$ è: $v_{i,s} = 259,19 \text{ m s}^{-1}$.

Ci siamo serviti di tabelle che riportano i valori di dette funzioni per H variabile di 100 in 100 da 0 a 11 000, con l'approssimazione di 5 cifre significative, ed il cui passo consente l'interpolazione lineare (le differenze prime sono tabulate) con la stessa approssimazione.

Alleg. 5. Calcolo di $K_1(M)$ e $K_2(M)$

Il rapporto del coefficiente aerodinamico di resistenza $c_r(M)$ al suo valore per numero di Mach, M , nullo, viene rappresentato con la seguente speciale funzione resistente $K_P(M)$:

$$K_P(M) = K_1(M) + K_2(M) P = c_r(M)/c_r(0).$$

Il coefficiente P della combinazione lineare, che diremo „secondo parametro di resistenza“, dipende dalla forma del corpo.

Adottiamo le seguenti espressioni di $K_1(M)$ e $K_2(M)$, ottenute dall'Ing. A. BONI in una sua ricerca:

M	0 - 1	1 - 2	> 2
$K_1(M)$	$\frac{1 + 1,35 M}{1 + 16 (1,1 - M)^2 [1 + 500 (1,1 - M)^4]}$	$\sum_{r=0}^5 a_r'(M-1)^r$	0
$K_2(M)$	0	$\sum_{r=0}^5 a_r''(M-1)^r$	$11,5/(M+2,2)$

Per i coefficienti a_r' ed a_r'' sono indicati i seguenti valori:

r	0	1	2	3	4	5
a_r'	2,15582	4,7974526	-12,592799	-12,56454	32,93855	-14,73449
a_r''	0	0	0	30,14388	-45,94536	18,53947

Esistono tabelle delle dette funzioni (allegati 8 e 9).

Alleg. 6. Formule di interpolazione

I valori delle funzioni $\delta_{i,r}(H)$ e $1/v_{i,s}(H)$ possono essere ottenuti con la precisione richiesta di 1/100 000 in valore relativo, mediante l'interpolazione lineare in base alle tabelle esistenti, come si è già indicato nell'Alleg. 4.

Per quanto riguarda le funzioni $K_1(M)$ e $K_2(M)$, mentre nel caso $M \geq 2$ si è eseguito il calcolo direttamente, invece per $0 < M < 2$ sono state adoperate le tabelle indicate nell'Alleg. 5, le quali, per ottenere la stessa precisione $1:10^5$, richiedono l'interpolazione parabolica.

Sono stati adoperati a tale scopo i coefficienti B'' di BESSEL (Cfr. Tabelle in „Nautical Almanac“, London, 1937), espressi da:

$$B'' = u(1 - u)/4,$$

dove u ha il significato seguente.

Sia dato il quadro delle differenze dei valori della funzione generica f per valori equidistanti w_{-1}, w_0, w_1, w_2 della sua variabile indipendente w :

$$\begin{array}{ccccccc} f_{-1} & & f_0 & & f_1 & & f_2 \\ & \Delta_{1/2}' & & \Delta_{1/2}' & & \Delta_{1/2}' & \\ & & \Delta_0'' & & \Delta_1'' & & \end{array}$$

Il valore f_u della funzione, che corrisponde ad un valore di w ottenuto incrementando w_0 di una frazione u dell'intervallo, è dato, nella interpolazione di 2° grado di BESSEL, da:

$$f_u = f_0 + u \Delta_{1/2}' - B''(\Delta_0'' + \Delta_1'').$$

Alleg. 7. Tabella dei coefficienti differenziali x_B, y_B m²

La derivata x_B della funzione $x(t; B)$ rispetto a B (ed analog. per y), in corrispondenza di un certo valore B_1 di B , si è ottenuta in prima approssimazione dal rapporto incrementale:

$$x_B(t; B_1) = [x(t; B_2) - x(t; B_1)]/(B_2 - B_1),$$

ammesso B_2 abbastanza prossimo a B_1 .

Con riferimento alle attuali traiettorie si è assunto:

$$B_1 = 80 \times 10^{-6}, \quad B_2 = 75 \times 10^{-6} \quad \text{m}^{-1}.$$

Altri parametri distintivi sono: $\theta_0 = 45^\circ$, $V = 750$ m/s, $P = 0,8$.

La precisione delle seguenti tabelle di x_B e y_B è intorno a 3 cifre signif.

t	$-x_B$	$-y_B$	t	$-x_B$	$-y_B$	t	$-x_B$	$-y_B$
0	0	0	10	1438	1375	30	3663	3491
0.2	1.6	1.6	11	1573	1506	32	3897	3679
0.4	6.2	6.2	12	1696	1627	34	4135	3860
0.6	13.4	13.4	13	1809	1741	36	4379	4034
0.8	23.2	23.2	14	1917	1851	38	4627	4200
1.0	35.4	35.2	15	2023	1959	40	4881	4355
1.5	74.8	74.2	16	2128	2066	42	5141	4499
2.0	125.4	123.8	17	2233	2172	44	5406	4629
2.5	185.4	182.6	18	2338	2278	46	5677	4744
3.0	249.0	249.6	19	2444	2383	48	5954	4841
3.5	324.8	322.6	20	2550	2488	50	6235	4920
4.0	406.4	401.2	21	2658	2592	52	6520	4980
4.5	492.8	484.0	22	2766	2695	54	6809	5017
5.0	582.6	569.4	23	2875	2798	56	7098	5034
			24	2984	2899	58	7387	5029
6	766.8	743.8						
7	950.0	916.0	26	3207	3101	60	7673	5011
8	1125	1080	28	3432	3297			
9	1288	1233						

Alleg. S. Tabella di $K_i(M)$, per $0 \leq M \leq 1$ $(K_2 = 0, \text{ per: } 0 \leq M \leq 1)$

M	$K_1(M)$	Δ^1	Δ^2	M	$K_1(M)$	Δ^1	Δ^2
		0.0				0.0	
0.00	1.0 0000			0.20	1.0 0006		
05	0001	0001	—	25	0011	0005	—
10	0002	1	—	30	0019	08	—
15	0003	2	—	35	0033	14	—
20	0006	3	—	40	0057	24	—
		0.0	0.0			0.0	0.0
0.40	1.0 0057	0007	0001	0.70	1.0 2601	0434	0067
41	0063	07	01	71	3035	0513	0079
42	0071	08	01	72	3548	0608	0095
43	0079	09	01	73	4155	0721	0113
44	0089		01	74	4876		0135
		11				0855	
0.45	1.0 0099	0012	0001	0.75	1.0 5731	1015	0160
46	0111	14	02	76	6746	1204	0189
47	0125	15	02	77	7951	1427	0223
48	0140	17	02	78	9378	1688	0261
49	0158		02	79	1.1 1066		0302
		20				1990	
0.50	1.0 0178	0023	0003	0.80	1.1 3056	2336	0346
51	0200	26	03	81	1.1 5392	2727	0391
52	0226	29	04	82	1.1 8119	3160	0433
53	0255	33	04	83	1.2 1279	3628	0468
54	0288		05	84	1.2 4907		0493
		38				4121	
0.55	1.0 0327	0044	0006	0.85	1.2 9028	4620	0500
56	0371	50	07	86	1.3 3648	5106	0485
57	0421	58	08	87	1.3 8754	5551	0445
58	0479	67	09	88	1.4 4305	5931	0380
59	0546		10	89	1.5 0236		0292
		77				6223	
0.60	1.0 0623	0089	0012	0.90	1.5 6459	6413	0190
61	0713	0104	14	91	1.6 2872	6494	+0081
62	0816	0121	17	92	1.6 9366	6472	—0022
63	0937	0141	20	93	1.7 5838	6361	—0111
64	1078		24	94	1.8 2199		—0180
		0164				6181	
0.65	1.0 1242	0192	0028	0.95	1.8 8380	5955	—0226
66	1434	0225	33	96	1.9 4334	5703	—0252
67	1659	0264	39	97	2.0 0037	5441	—0262
68	1923	0311	47	98	2.0 5478	5180	—0261
69	2234		56	99	2.1 0658		—0256
		0367				4924	
0.70	1.0 2601		0067	1.00	2.1 5582		

Alleg. 9. Funzione $K(M)$ per $1,0 \leq M \leq 2,0$ (caso $P = 0,8$)

M	$K(M)$	M	$K(M)$
1,00	2,15582	1,50	2,61460
1,02	2,24682	1,52	2,59406
1,04	2,32830	1,54	2,57302
1,06	2,40078	1,56	2,55165
1,08	2,46478	1,58	2,53013
1,10	2,52080	1,60	2,50859
1,12	2,56935	1,62	2,48718
1,14	2,61088	1,64	2,46602
1,16	2,64586	1,66	2,44523
1,18	2,67473	1,68	2,42489
1,20	2,69793	1,70	2,40511
1,22	2,71587	1,72	2,38594
1,24	2,72895	1,74	2,36744
1,26	2,73757	1,76	2,34967
1,28	2,74210	1,78	2,33264
1,30	2,74288	1,80	2,31638
1,32	2,74028	1,82	2,30089
1,34	2,73463	1,84	2,28616
1,36	2,72624	1,86	2,27218
1,38	2,71542	1,88	2,25891
1,40	2,70245	1,90	2,24629
1,42	2,68762	1,92	2,23427
1,44	2,67117	1,94	2,22277
1,46	2,65336	1,96	2,21171
1,48	2,63444	1,98	2,20098
1,50	2,61460	2,00	2,19048

Per $M > 2$
$$K(M) = \frac{9,2}{M + 2,2}.$$

Bibliografia

1. H. ATHEN, Ballistik. Leipzig: Quelle & Meyer, 1941.
2. Anonimo, Apparecchiatura „O.G.” modello AV/1 per la misura delle velocità iniziali dei proiettili. Notiziario di Armamento Aeronautico n° 3, Ministero Difesa Aeronautica. Roma, 1954.
3. A. BONI, Formula binomia per la resistenza aerodinamica specie in (aero) balistica. L'aerotecnica, Roma (in corso di pubblicazione).
4. E. CAVALLI, Balistica Esterna. Torino: Soc. Tip. Ed. Nazionale, 1928.
5. C. E. CREMONA, Rilevamento e rivelamento delle caratteristiche di volo dei razzi e missili. Bericht über den V. Internat. Astronaut. Kongreß. Wien-Innsbruck: Springer, 1955.
6. C. E. CREMONA e G. MAREGA, Apparecchiatura fotogoniometrica per il rilevamento dei punti di caduta. Notiziario di Armamento Aeronautico n° 3, Ministero Difesa Aeronautica. Roma, 1955.
7. S. F. HOERNER, Aerodynamic Drag. Midland Park: Hoerner, 1951.
8. H. H. JACKSON, C. B. RUMSEY e L. T. CHAUVIN, Flight Measurements of Drag and Base-Pressure of a Fin-Stabilized Parabolic Body of Revolution (N.A.C.A. Res. Mem. 10) at Different REYNOLDS Numbers and at MACH Numbers from 0,9 to 3,3, N.A.C.A. Techn. Note 3320 (1954).

9. H. LORENZE, Ballistik. München-Berlin: Oldenbourg, 1942.
10. U. NOBILE, Elementi di aerodinamica. Roma: Libreria dello Stato, 1954.
11. G. SUGOT, Balistique extérieur théorique. Paris: Gauthier-Villars, 1928.
12. G. P. SUTTON, Rocket Propulsion Elements. New York: Wiley & Sons, 1949.
13. T. VAHLEN, Ballistik. Berlin: W. de Gruyter, 1942.

Vol.
3
1957

Project Vanguard — Earth Satellite Vehicle Program

Characteristics, Testing, Guidance, Control, and Tracking¹

By

F. I. Ordway, III², ARS

(With 12 Figures)

(Received December 1956)

I. Introduction

The first report¹ on the U.S. satellite vehicle program was effective April 1956 and presented some administrative details, characteristics of the Vanguard rocket, information on tracking, and advantages to scientific research of orbital vehicles. This article will expand on the above subjects, and will include some information on satellite instrumentation. It is planned, however, to defer to a later paper a full discussion of satellite instrumentation, partly because of space requirements, and partly because of final decisions on instrumentation and scientific experiments to be carried out are still to be made. Before any final selections are possible, the final design and capabilities of Vanguard must be fully established.

Notwithstanding, the following proposed experiments have been tentatively accepted (of some 30 proposals received by the I.G.Y.):

<i>Experiment</i>	<i>Agency</i>
Cosmic Ray Observations	State University of Iowa
Satellite Environmental Measurements (pressure, temperature, meteoric incidence, skin erosion)	Naval Research Laboratories
Measurement of Solar Ultraviolet Intensity in the Lyman Alpha Region	Naval Research Laboratories
Measurement of Ionospheric Structure	Ballistics Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground
Measurement of the Earth's Cloud Cover and Albedo	Signal Corps Engineering Laboratories
Measurement of Interplanetary Matter	Air Force Cambridge Research Center
Measurement of Meteoric Dust Erosion of Satellite Skin	University of Maryland
Determination of Flux of Primary Cosmic Ray Nuclei with Atomic Number Larger than Eight	Research Institute for Advanced Study, Glenn L. Martin Co.; Barton Research Foundation

¹ See F. I. ORDWAY, III, The U.S. Satellite Vehicle Program. *Astronaut. Acta* **2**, 115 (1956).

² Member, Editorial Board; General Astronautics Corp., Oyster Bay, New York, USA. (Now, Huntsville Field Office, Box 656, Huntsville, Ala., USA.)

II. Vanguard Characteristics

A. Overall Missile

Contractor	Glenn L. Martin Co.
Length, feet	72 ¹
Diameter, inches	45
Fineness ratio	19 : 1
Weight, gross, pounds	22,600 (also given: 21,978.5)

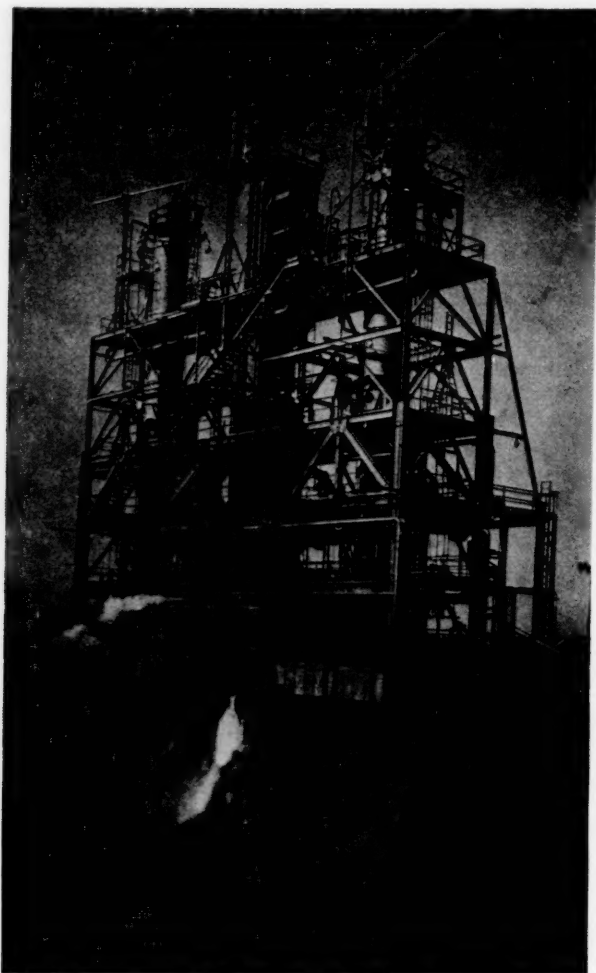


Fig. 1. Vanguard's second stage rocket motor is being developed and tested by Aerojet-General Corporation, and features a "spaghetti" type of thrust chamber construction (aluminum alloy tubes). The oxidizer is used as the regenerative cooling agent. Thrust may be as high as 10,000 pounds

¹ The addition of the lengths of the three stages totals more than 72 feet. The reason is that the stages partially fit inside one another.

Weight, airframe, pounds	3,100
Weight, propellants, pounds	Approx. 17,000
Mass Ratio	0.72
Cognizant Agency	Naval Research Laboratory



Fig. 2. Powerful new General Electric rocket engine, designated the X 405, will be employed to propel the Vanguard's first stage

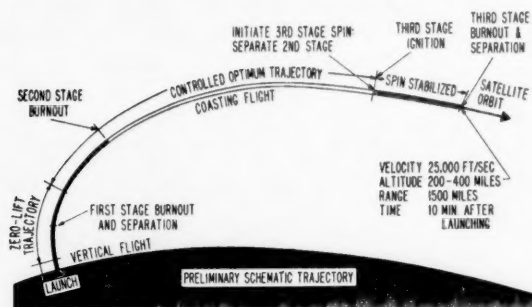


Fig. 3

Launch Latitude
Vehicle Configuration
Construction

25° 28' N

Finless

Aluminum sheet for first stage tanks.

Engine section of aluminum frames and stringers, with rivetted magnesium sheet skins. Spot and fusion welding used to join metal parts. Second stage will use stainless steel in tanks, with aluminum frames & stringers construction, magnesium skin. Second stage forward section will be of aluminum and magnesium

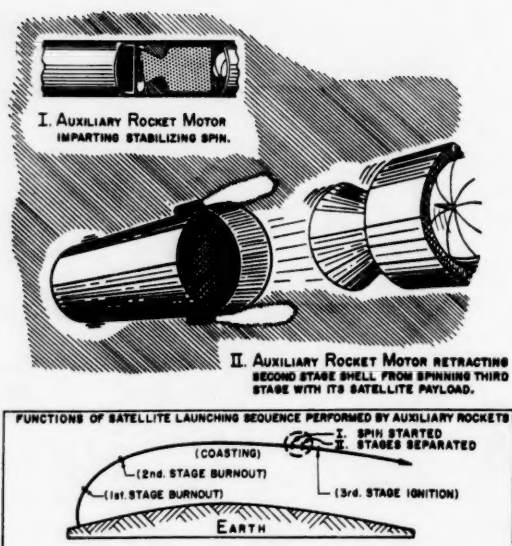


Fig. 4

B. First, Second and Third Stage Details

Item	Units	First stage	Second stage	Third stage
Airframe contractor		Glenn L. Martin Co.	Glenn L. Martin & Aerojet-General Corp.	Alleghany Ballistic Laboratory and/or Grand Central Rocket Company (in conjunction with Martin and Aerojet). They supply the engine and case
Engine Contractor		General Electric Co.	Aerojet-General Corp. (propulsion unit and integral tanks)	
Length	feet	44	31	
Diameter	inches	45	32	—

Item	Units	First stage	Second stage	Third stage
Weight (1) overall	pounds	17,800	4,770 (with	—
(2) propellants		—	— included	—
(3) payload		—	— third stage)	—
(4) empty		—	—	—
Velocity, burnout	miles/hour	3750 (pos- sibly up to 4000)	9,135	17,725 ¹
Range, maximum	miles	275	—	1500
Velocity, impact	miles/hour	—	—	—
Acceleration, maximum	<i>g</i>	—	—	—
takeoff	<i>g</i>	6	—	—
Thrust, maximum	pounds	27,000	9000 plus	1000 plus
Propellants		kerosene/liq- uid oxygen	white fuming nitric acid/ unsymet- rical dimethyl- hydrazine	solid
Feed system		turbo pump	helium gas pressure	—
Altitude, peak	miles	—	—	300
burnout	miles	36 ²	140	300
Temperature, skin	°F	—	1000	1000
Angle of ascent, burnout	degrees	45	—	—
Time (1) to burnout	seconds	140—150	130—140	—
(2) to peak		—	—	—
(3) to impact (or orbit)		—	—	—
Vibration characteristics		—	—	—
Initial heading of vehicle	degrees	28—35 S of E	—	—
Percent orbital velocity given by each stage		15	32	50
(3% supplied by Earth's rotation)				
Separation details			retro-rockets will retard 2nd stage at 3rd stage separation (50 lb. thrust)	Atlantic Research Corp. solid rockets will spin 3rd stage at separation (200 rpm) (50 lb. thrust)

¹ Final velocity proportional to ratio of loaded rocket weight to satellite weight. About 1,000 pounds of vehicle weight needed to place each pound of satellite into orbit.

² Second stage separates at this altitude, carrying the rest of the vehicle to about 140 miles, when burnout occurs. During the third stage of flight both the second and third stages coast to some 300 miles (vehicle attitude being controlled by small jets of residual second-stage pressurization gas). The third stage is fired at this altitude, and reaches the final velocity of nearly 18,000 miles per hour. It is spin-stabilized on its longitudinal axis by mounting the stage on a turntable (on second stage) and imparting torque to it by the small Atlantic Research solid rockets. At third stage burnout, the satellite is separated from the rocket at a few feet per second by small retroactive rockets.

Item	Units	First stage	Second stage	Third stage
Construction		monocoque	monocoque	Single solid propellant cylinder
Engine designation		X 405	—	—
Engine characteristics				
weight	pounds	—	—	—
temperature of chamber	°F	—	—	—
chamber diameter	inches	—	—	—
nozzle throat diam.	inches	—	—	—
chamber volume	sq. in.	—	—	—
characteristic chamber length (L^*)	inches	—	—	—
nozzle area expansion ratio		—	—	—
cooling		regenerative	regenerative	
Specific impulse	lb/lb/sec	—	—	—
Propellant flow rate	lb/sec	—	—	—
Effective exhaust velocity	ft/sec	—	—	—
Chamber pressure	lb/in. ²	—	—	—
Mixture ratio, O/F		—	—	—
Expansion cone half angle	degrees	—	—	—
Ignition characteristics		—	—	—
Injector System		—	—	—
Misc. remarks, factors		—	—	—

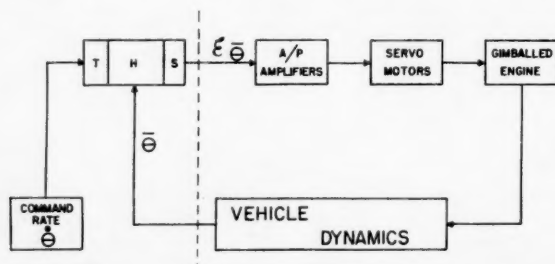


Fig. 5. Pitch axis of Vanguard Rocket control system is illustrated in this simplified block diagram. Changes and corrections needed in pitch axis are channeled through the autopilot to the servo system that operates actuators which push and pull on the gimballed thrust chamber. Resultant changes in Vanguard rocket dynamics are reinterpreted by pitch gyro to complete closed loop system. In the diagram: H stands for angular momentum of gyro wheel, the property that gives the gyro its "memory". T indicates the gyro torquer through which the gyro "memory" is changed. S is the signal pick off. Other figures represent the various angles that must be accounted for in keeping the rocket in the correct pitch heading. $\bar{\Theta}$ is the actual pitch angle. $E \bar{\Theta}$ is the error in the pitch angle measured by the pitch axis gyro. The error is determined by comparing actual pitch angle $\bar{\Theta}$ to the "memorized" pitch angle. $\dot{\Theta}$ represents scheduled changes needed in the pitch angle to allow rocket to slope toward an orbit so that satellite might be successfully launched. This constant changing of the pitch gyro is accomplished by an automatic pitch scheduler which signals changes needed to the gyro torquer in degrees per second

III. Guidance and Controls

A. Introduction

In the second stage, forward of the fuel tank, the guidance, control, and telemetering and instrumentation packages are located. The guidance reference system is entirely within the Vanguard, and serves to maintain the finless vehicle on the proper course, first vertical, and then inclining. Once the third stage separates from the second, all ground control is lost. The final angular heading depends on close steering precision and efficiency of Vanguard's control system.

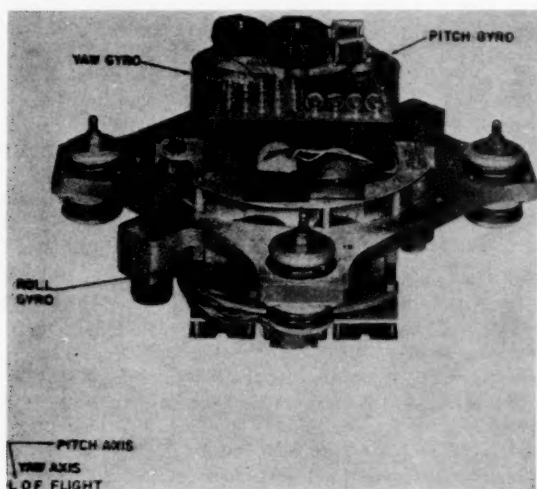


Fig. 6. First production model of Project Vanguard rocket guidance system illustrates compactness of 3-axis platform. HIG-6 gyros will be calibrated to three flight axis — pitch, yaw and roll (line of flight). Gyros, and electronics are mounted in casting

B. Capsule Data on Control System

Manufacturer, three-axis guidance reference system	Minneapolis-Honeywell Regulator Co. (Aeronautical and Ordnance Division)
Manufacturer, magnetic amplifier autopilot	Vickers, Inc. (Vickers Electric Division) (Subsidiary of Sperry-Rand Corp.)
Function, reference system	Through integrating gyroscopes, to detect vehicle roll, pitch and yaw. Gyro-generated signals feed the magnetic amplifiers and serve the actuators
Function, autopilot	Tied in to reference system, actuators align the gimbel-mounted thrust chambers to correct errors in flight path
Weight, hermetic integrating gyro (HIG)	4.6 pounds
Space envelope, hermetic integrating gyro	5.9 × 3.07 inch cylinder
HIG-6 gyro parts	Gyro rotor, supporting gimbal, torque generator, and signal pick-off

C. Discussion of System

Three extremely precise gyroscopes, calibrated to a pre-established heading reference in yaw, roll and pitch, form the core of the control system. The gyros, known as hermetic integrating gyros (HIG), weigh less than five pounds each, have

somewhat less than 300 parts, and incorporate bearings alike to within 1/10,000,000th part of one inch. Virtually frictionless operation is assured by mounting the gyro rotor assembly and gimbal in a fluorlube fluid.

Heaters built into the gyros keep the temperature at a suitable level for efficient operation. The temperature controllers are all-transistor amplifiers (using six H-6

power transistors). Because of very slight voltage loss, they are used both for power and switching functions. Since there are no relay contacts in the system, shock and vibration problems are avoided. The gimbal, in which the gyro wheel is mounted, "floats" in the fluorlube in the center of the gyro container and is supported by tiny jewel bearings at each end. At the ends of the gyro case are located the torque generator and signal pick-off potentiometer.

On application of the 400 cycle operating power, the gyro will operate at 12,000 rpm's, developing a type of inertia. The gyro motors respond to undesired changes in roll, yaw and pitch by rotating the gimbal on its bearings. The gyro signal pick-off detects this movement and releases an error signal through the autopilot amplifier to the servo system, which causes pitch and yaw corrections to be made in thrust chamber alignment. While magnetic servo amplifiers will probably be used, vacuum tube types are being developed as a backup. Roll corrections are made by on-off jets (no proportional control) on the sides of the rocket, which also are controlled by the guidance system.

A gyro calibrating system for correcting the "memory" of the guidance system will be provided at the Vanguard firing location. This will serve to correct for any alignment errors that may have been introduced following the placement of the rocket on the platform.

A final task of the Honeywell system is to monitor the pitch heading of the Vanguard vehicle, bringing the rocket into a trajectory amenable to the launching

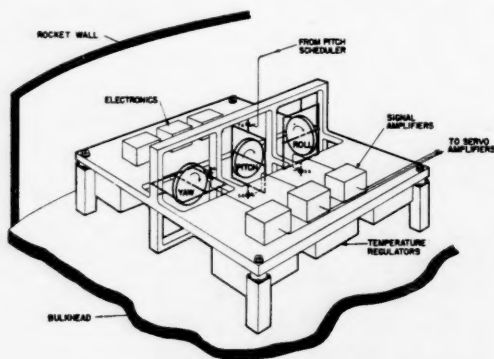


Fig. 7. Functional diagram of three-axis guidance reference system for Project Vanguard rocket shows placement of three HIG-6 gyros on platform in second stage of the three-stage rocket. These and other components manufactured by Minneapolis-Honeywell Regulator Company's Aeronautical Division will be housed in container resembling two derby hats placed brim to brim. Each gyro will have its temperature regulator, amplifiers and other electronic equipment. A scheduling device will work through the pitch gyro only

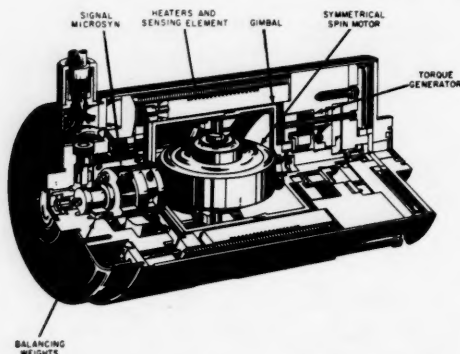


Fig. 8. Cutaway drawing of HIG-6 floated gyro shows placement of rotor and gimbal (surrounded by viscous fluid) between torque generator and signal microsyn units. This is most sensitive of production-line gyros, although it has only about 300 parts

of its satellite payload. Velocity, altitude, and pitch angle all are important at this phase of flight, and the Honeywell electronic system makes continued adjustments in the latter two quantities. A clock-like pitch programming device, working into the torque generator (used to change gimbal position) of the pitch gyro, effects the pitch heading commands. The pitch programmer will cause a tightly monitored direct current to pass through the torque generator, thereby producing a torque to rotate the gyro gimbal to the desired changed axis. This new position now forms the basis from which corrected electrical signals are generated and fed into the guidance system. During the important coasting part of the trajectory pitch heading must be kept to within $1/2$ degree accuracy.

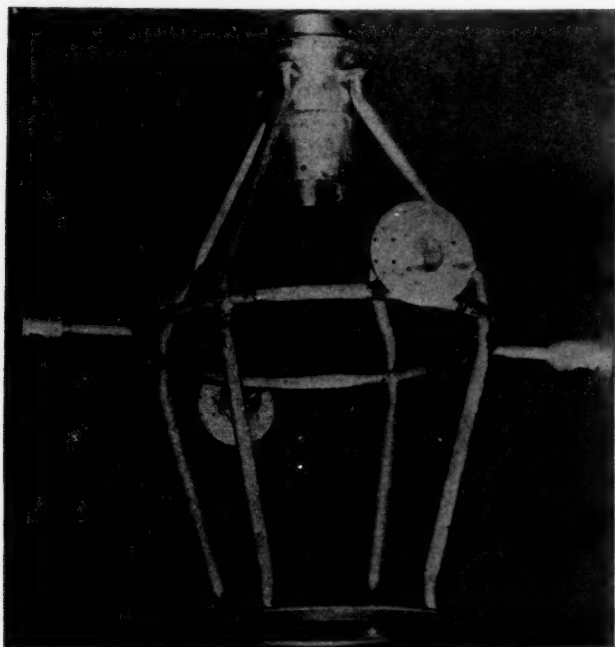


Fig. 9. The internal reinforcing structure of the satellite is made by Brooks & Perkins, Inc. of magnesium tubing and parts machined from magnesium bar stock. All parts of this structure are assembled by welding, using the inert gas-shielded arc welding method

IV. Satellite Details

Constructor	Brooks & Perkins (cost-plus-fixed-fee contract)
Power Source	Batteries (chemical storage). (Later perhaps silicon wafer solar battery)
Power generation	5 watts
Time to orbit	10 minutes (approx.)
Period (if $h = 500$ miles)	100 minutes
Orbital characteristics	200 to possibly 1400 miles
Orbital eccentricity	~ 0.07
Number of satellites to be built	6 (with current funds)

Satellite size	20 inches diameter. Possibly, smaller 6 and/or 12 inch spheres will also be used, eventually
Cost	—
Exterior finish	Highly polished for ease of optical tracking. Will incorporate silicon monoxide
Coating material	Gold, 1/30,000th inch thick

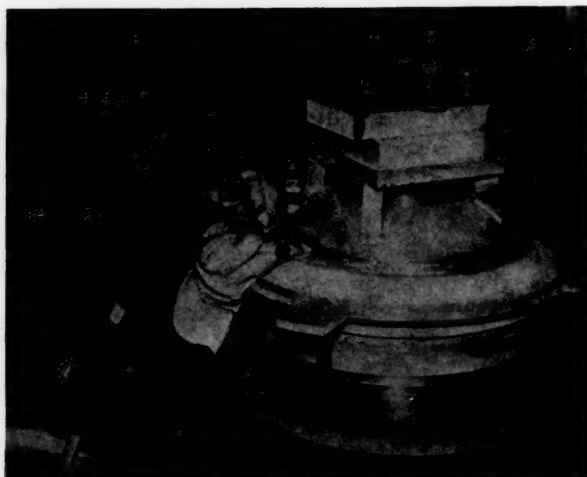


Fig. 10. Welding the outer magnesium cover ring over the depressed area of the spinning to form a pressure-tight cavity on the inside of the Earth satellite

Weight	21-1/2 lbs.
Skin thickness	0.03 inch
Weight, structure (overall)	10 lb.
Weight, shell	4 lb.
Constructional materials	Magnesium: 95%; Aluminum: 3-3.5%; Zinc: 1%
Interior bracing	Magnesium tubing plus Kel-F low thermo-conductivity plastic
Construction details	Screws hold magnesium skin to bracing. Sphere sealed by welding or mechanical joining
Data storage	Memory device (elaborate)
Exterior tolerance	4 microinches
Manufacturing details	Both hemispheres to be manufactured separately, then joined after all in- strumentation is inserted
Support structure	Battery supports. Antenna supports.
Instrumentation readings	To be triggered by radio command
Command frequency	Secret

Protection	A nose cone will protect the satellite during the aerodynamic portions of the flight. Much nose cone work is being carried out by the General Electric Co. under Air Research & Development Command. Developements in this area are being closely watched
Orbital tolerances	Perigee: 200 miles Apogee: 800 miles desired 1500 miles maximum
Allowable error velocities	± 340 miles per hour
Vehicle orientation at time of satellite release	0 to 2.9 degrees

V. Administration

Vanguard Director JOHN P. HAGEN.

Vanguard Technical Director MILTON W. ROSEN.

Members, Technical Panel, Earth Satellite Program.

RICHARD W. PORTER, Chairman

FRED L. WHIPPLE

HUGH ODISHAW, Secretary

JAMES A. VAN ALLEN

JOSEPH KAPLER

LYMAN SPITZER

HOMER E. NEWELL, Jr.

H. F. SPILHAUS

W. H. PICKERING

Dept. of Defense Administration C. C. FURNAS (Assistant Secretary of Defense, Research & Development).

Chairman, Technical Advisory Panel H. J. STEWART.

Funds appropriated

\$ 18,500,000. Of this, \$ 5,000,000 goes to Dept. of Defense to aid in rocket program (up to \$ 50,000,000 may later be allocated)

VI. Preliminary Test Firings

On 8 December 1956 Viking rocket No. 13 was fired at 0103 from Cape Canaveral, Florida (site of Patrick Air Force Base Missile Test Center launchings). At the peak of its trajectory it had reached 125 miles, and at engine cutoff its velocity was 4000 miles per hour. The impact point was some 180 miles from the launching site.

Tracking beacons, telemetering equipment, and the Minitrack device were ejected from the nose instrumentation section during the flight, and tracked. Informations on temperatures and pressures were telemetered to the ground. Viking 13 was launched from a new type launching device. It has been reported that this rocket incorporated a Vanguard rather than Viking nose cone, and that control and stabilization tests were made.

Future testing will include slugs to represent the weight of the satellite, separation components, and staging. Control will always be maintained from the ground until the third stage has been separated. Viking 14 will next be fired, followed by actual Vanguard test vehicles.

Vanguards will be launched from a platform designed and built by Loewy-Hydropress Division of Baldwin-Lima-Hamilton Corp. It is less than 12 feet high and approximately 15 feet square. Ground-controls test equipment is being handled by the Polarad Electronic Corporation.

VII. Volunteer Optical Tracking Program

A. Administrative and Background

The volunteer program, like the professional, is administered by the Smithsonian Astrophysical Observatory. The following officials are in charge:

Dr. J. ALLEN HYNEK, Associate Director, Satellite Tracking Program

Dr. ARMOND M. SPITZ, Coordinator of Visual Observations

MARTHA L. HOLT, Administrative Assistant.

The amateur tracking program, which carries the code-word "Project Moonwatch", is extremely important to the success of the overall tracking program for I.G.Y. satellites. Some 97 or more Moonwatch stations are to be provided, each requiring approximately 15 members to form a group. The importance of these groups in the overall tracking program lies in the fact that, during the initial path stages, the satellite's position will be uncertain, and it will not be possible for the large professional cameras to go into operation. Amateur Moonwatch observers (together with Minitrack radio crews) will have the responsibility of "acquiring" the satellite and furnishing the approximate positions to allow the general characteristics of the orbit to be determined. Moonwatchers, then, by providing for preliminary ephemerides, inform the professionals where to train their equipment, allowing them to perform their required functions.

The radio and amateur visual programs back one another up, but it should be noted that, should the satellite's Minitrack transmitter fail to operate, the full acquisition responsibility will be in the hands of the amateurs. Furthermore, during the final orbital stages of the artificial satellite, when it begins to spiral earthward rapidly, only amateur observations will be feasible. At this stage it is assumed that the battery power on the satellite will have been used up, and of course the orbit will be changing at a rate far beyond the capabilities of the professional cameras to handle.

B. Communications

All U.S. amateur observations will be filtered through the Smithsonian Astrophysical Observatory's Central Computing Center, which will act as the control center. Amateur group leaders will forward all important sighting and tracking information by phone or radio, or perhaps telegram, to this center. Instructions on this and other aspects of the volunteer program are contained in the Smithsonian's Bulletins for Visual Observers of Satellites.

C. Equipment

The amateur will use the following equipment:

- (1) Telescopes with apertures of about 50 millimeters (between 45 and 55) having a magnifying power of $6\times$ or $7\times$, or
 - (2) Mounted binoculars or monoculars (field of view: 10 to 12 degrees)
 - (3) Meridian marker pole with crossbar
 - (4) Timing equipment such as (a) radios, (b) tape recorders, and (c) stop watches.
- Such instruments are necessary to bring out the satellite and the background control stars with relative ease.

The following inexpensive Moonwatch telescope has been suggested for amateur use:

Magnification	5—1/2 \times
Objective	51 mm in diameter
Focal length	180 mm
Aluminum tube (into which objective and eyepiece are mounted)	8—1/2 inches long 2—1/32 inch inside diameter 2—3/8 inch outside diameter
Field	12—1/2 degrees

The magnification is low enough to permit a wide field. The image brightness has been described as "impressive".

A relatively inexpensive chronograph has also been developed, which is described by WALTER G. MARION of the University of California in Smithsonian Bulletin No. 3.

D. Trial Runs

There was to have been an alert for the amateur tracking stations on 8 December 1956, but this was postponed until Spring, 1957 to "allow Moonwatch teams to become better organized and trained in observing techniques". To test the tracking organization, a simulated satellite will be flown. This will be an airplane flying at an

altitude high enough so that its motors cannot be heard, and at a speed which will simulate as close as possible that of a satellite. A light simulating the expected brightness of the satellite will be carried.

E. Instructions to Amateurs (from Smithsonian Bulletin No. 4)

(1) During Transit of the Satellite:

(a) Give appropriate signals so that time will be recorded at the following critical instants:

1. When the satellite is first observed.
2. When the satellite disappears behind the mast.
3. When the satellite leaves the field of view.

(b) Mentally record as accurately as possible the complete path of the satellite with respect to the stars as it crosses the field of view.

(c) Note the position of the western edge of the mast with respect to the background stars.

(d) Estimate the satellite's brightness relative to one or two stars in the field.

(2) Immediately After the Satellite Has Left the Field:

(a) Sketch the path of the satellite on the star chart; also the position of the western edge of the mast.

(b) Mark the points on the satellite's path where the times were recorded.

(c) Determine the magnitude of the satellite relative to the stellar magnitudes obtained from the star chart.

(3) In Consultation, the Group Leader, the Observer, and the Time-keeper will:

(a) Determine the time of disappearance of the satellite behind the mast, also its right ascension and declination at that time. (This is the most essential information that must be reported to headquarters.)

(b) Measure with a protractor the position angle of the satellite's track on the chart.

(c) Calculate the angular velocity of the satellite, making use of the times and positions recorded on the chart.

(4) Reporting the Observations. The station leader will transmit, in prearranged form, the following data to Cambridge:

- (a) Station leader's name, and the name and code number of the station.
- (b) Time of disappearance of the satellite behind the western edge of the mast.
- (c) Right ascension and declination of the position of disappearance behind the mast.
- (d) Position angle of the satellite path.
- (e) Angular velocity of the satellite.
- (f) Magnitude of the satellite.
- (g) Number of observers participating.
- (h) Times of beginning and ending of the observation period.
- (i) Weather and atmospheric (seeing) conditions.

F. International Tracking Organization

Internationally, there is as yet little information on what type of amateur visual tracking teams will be set up. A considerable amount of interest in South America has been exhibited, and Prof. TEOFILO TABANERA of Argentina has been named coordinator of activities on that continent. During the I.G.Y. Rio de Janeiro conference earlier this year, scientists pointed out the importance of Central and South American cooperation in the optical program. I.G.Y. scientists hope, of course, that a world-wide network of observers will be available for making the visual observations. Each nation is supposed to name its optical tracking coordinator.

G. The Moonwatch Program

Both the number and quality of Moonwatch observers will help determine the reliability of the observations made. The first and most important requirement is

that the satellite be acquired, i.e. that it not be permitted to pass an observing station unseen. Smithsonian Observatory will tell the group leaders approximately where and when the satellite will pass, but it will be the entire responsibility of the teams to locate it and send reliable observations to the Cambridge Control Center. It has been emphasized that only group leader reports will be accepted by the control center. The key to success in this program is teamwork and cooperation, not isolated, individual observations.

Moonwatch coordinators have put forth the following three points, the fulfillment of which will contribute to the success of the program:

(1) The station's geographical position must be precisely known. Otherwise, observation reports will be useless at the computing center.

(2) The computing center will only deal with a limited number of known stations, and will not be able to investigate any reports from any stations other than those approved.

(3) The "optical fences", into which the volunteer groups will form, are designed to prevent any satellite from "slipping through" successive observation zones without being recorded.

H. Group Organization

The observing station will be organized under a group or team leader. The optimum number of observers per station has been set at about 30, each provided with binoculars or monoculars with wide aperture and field, so mounted that the instrument is fixed in the plane of the meridian. It is felt, however, that smaller teams could be useful in the program. The best instrumentation of the group will depend largely on the number of available observers.

Moonwatch officials have informed the groups that a shortwave radio giving accurate time signals is practically indispensable. They also suggest that recording equipment be available to permit permanent records to be made of time and other data. Stopwatches are of course necessary. Observers will probably wear lapel microphones directly wired to a master tape recorder, which will also record the radio time signals.

I. Procedures

Within the framework of establishing "optical fences", each group leader will be assigned a given sky area along the meridian. Enough overlap with adjoining group areas will be provided, thereby ascertaining tight coverage against missing the satellite on the outskirts of a given control area.

In order to be able to accurately report a satellite's path across the sky, each amateur should be well acquainted with the fainter stars as they move across his position. He will then, upon making a sighting on a satellite, be able to record precisely the vehicle track across his section of the sky. Moonwatch officials have emphasized to the amateurs that once a sighting has been made, a signal should warn the timekeeper and recorder. Under no circumstance should the optical instrument be rotated to follow the movement of the satellite; only the group leader and assistant group leader are, at this point, permitted to confirm observations with moveable binoculars.

Following confirmation, attempts will be made to follow and report the satellite's path. Information obtained by the central computing station will be used to more accurately work out the orbital characteristics of the Earth-circling vehicle. When the satellite is near perigee, the twilight observing period will be not more than one hour, but it may exceed two hours when at apogee. It is possible that two sightings may be made during a single observing period. At perigee it will apparently move at about 1.3 degree per second, and at apogee (or at lower meridian altitudes), the rate will be cut to a small fraction of one degree each second. Any observer will probably be able to observe the vehicle for only 20 to 30 seconds.

J. Station Organization

Site	Level, free from lights.
Viewing	Unrestricted, north and south.
Coverage	Entire meridian to N and S limits which depend on latitude of station.
Geometry of station	25—35 foot vertical pole stands at center, with crossbar near the top, to serve as meridian marker. Observers are stationed along a N—S line through the pole at a spacing which will depend on the effective fields of the instruments. Sufficient overlap must be provided for.

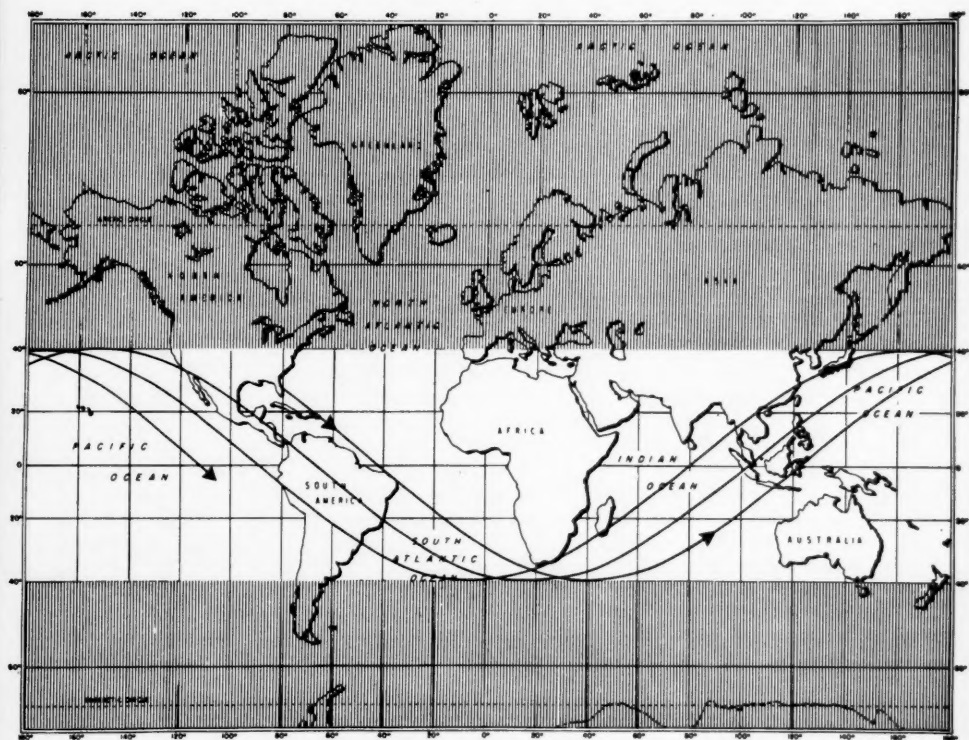


Fig. 11. Mercator Projection of Satellite Orbit

VIII. Professional Optical Tracking Program*A. Administration*

Here too, the administration is carried on by the Smithsonian Astrophysical Observatory, with the following organization:

Dr. FRED L. WHIPPLE, Director Smithsonian Astrophysical Observatory.

Dr. ALLEN HYNEK, Associate Director, Satellite Tracking Program.

Dr. KARL C. HENIZE, Astronomer in Charge of Satellite Tracking Stations.

All communications will presumably be handled by radio connection between the professional stations and the headquarters at the Smithsonian Astrophysical Observatory. The Cambridge Center will conduct preliminary orbital calculations, provide for the optical stations, regular ephemeris predictions of possible satellite transits, handle geodetic studies, and back up the master computation center in Washington.

B. Tracking Stations

It is understood that there will be a total of 12 sites where the professional satellite tracking cameras will be located. These sites will be selected from the following tentative list:

White Sands, New Mexico, USA.	Wyoming, USA.
Cocoa Beach, Florida, USA.	Maui, Hawaii
Japan	S. China
Australia	India or Pakistan
Iraq	Iran
Egypt	Ethiopia
Bloemfontein, Union of S. Africa	Spain
Morocco	Dutch West Indies
Venezuela	Quito, Ecuador
Antofagasta, Chile	Arequipa, Peru
Brazil	Cordoba, Argentina

C. Optical Tracking

The main professional item of equipment will be an F/1 Schmidt camera, with a 20 inch aperture. It will give 30 micron images over a field 30 degrees in diameter. The actual field photographed on 55 millimeter strip is 5 degrees by 30 degrees. It will be capable of picking up a 15 inch sphere at approximately 1000 miles. The Schmidts stand about 10 feet high, and are 8 feet wide. According to expectations the images will be measured with a probable error of plus or minus one second of arc perpendicular to the satellite path and plus or minus three seconds of an arc along the path. It is felt that ground stations will be positioned to within about 40 foot accuracies, allowing tremendous advances in geography to be registered. Of course, the measurements along the path will depend primarily on the accuracy of the time measurement, which, in turn, will depend greatly on a crystal clock designed by ROBERT DAVIS of Harvard University. It is being constructed by ERNST NORRMAN of the Ernst Norrman Laboratories, Williams Bay, Wisconsin. According to information available at this time, the clock will give an estimated accuracy of plus or minus 0.001 seconds of time and will be readable to plus or minus 0.0001 seconds of time. The time display unit, including a circularly polarized oscilloscope, is photographed on each film exposure.

Assuming a perigee of 200 miles and an apogee of 1500 miles the photo visual magnitude of the satellite (when overhead) will range from 5.7 to 10.1. The following chart breaks this into seven increments of 200 miles each. Angular velocity will range from 88 ft/sec to 9, relative to observer.

Height of satellite, miles	Calculated photo visual magnitude of satellite when overhead
200	5.7
400	7.2
600	8.1
800	8.7
1000	9.2
1200	9.6
1500	10.1

D. Satellite Tracking Camera Details

The satellite tracking camera is a modified Schmidt design with a three element apochromatic corrector plate. It has an effective aperture of 20 inches, a focal ratio of 0.97, and a good field of 30 degrees. The mounting is a tri-axis system, allowing

the camera to track in any position across the sky. The film can thus be oriented parallel to any predicted satellite path. The mechanical features of the tracking camera, including the shutter, timing and film transport mechanisms and the satellite tracking drive, have been designed by JOSEPH NUNN and Associates of Los Angeles. Pyrex blanks for 12 mirrors are already in production at the Corning Glass Co, while correcting plate glass will come from Germany (Schott optical concern).

The following operation is visualized:

- (1) The camera will track and expose the satellite.
 - (2) It will then track at the sidereal rate and expose the star background.
 - (3) Both exposures will occur on the same film.
 - (4) This double exposure, followed by a rapid change of film, can be accomplished in times and varying in steps from 2 seconds to 16 seconds. The time of successive exposures will depend on (1) sky conditions, (2) angular motion, and (3) satellite's altitude.
 - (5) Camera drive and shutters are powered by 2 1/4 horsepower synchronous motors. Their input frequency is controlled by the crystal clock.
 - (6) Stations will send in rough positions (1—3 minutes of arc) to Cambridge Computing Center within an hour or two after photos have been taken.
- Continuous Kodak Tri-X film will be used.

E. Details of the Crystal Clock

The crystal clock:

- (1) Provides time accurate to plus or minus 0.001 seconds.
- (2) Is readable to plus or minus 0.0001 seconds.

A radio receiver (tuned to one of the standard time signal transmitters) is an integral component of the clock. This receiver is used both to calibrate the zero point of the clock and to supply electrical impulses at 0.001 seconds. The impulses are displayed on a circularly polarized oscilloscope. By means of a servomechanism the clock display is duplicated within the camera where it is photographed on each operating cycle to record the time of observation. An emergency clock power supply will also be provided, since an uninterrupted power supply is necessary to insure accurate calibration of the clock at all times.

IX. Radio Tracking of Satellites

A. Introduction

A radio tracking system known as Minitrack has been developed by the Naval Research Laboratory for use during the I.G.Y. for measuring the angular position of satellite vehicles. The system operates by comparing the length of one path to the vehicle from a receiving antenna with that of the second of the pair (electrical phase comparison method). Minitrack stations employ nine receiving antennas, arranged in the form of a cross, and occupy a site area of about 1000 square feet. While perhaps an order of magnitude less accurate than optical tracking, Minitrack can operate during overcast weather and during the day. Assuming that the satellite-borne transmitter functions properly, it is the surest method available for locating the vehicle in space and determining its orbit. Other than providing ephemerides, Minitrack will be useful for mapping and geodetic operations.

A Minitrack electronic ground installation consists of a pair of receivers located at opposing ends of base lines, which are several hundred feet long. They act as radio frequency interferometers, recording the intervals between satellite-emanated radio signals. Additional pairs at right angles to the first improve the accuracy of the "fix" on the satellite. A Minitrack station requires the services of 10 technicians, and costs some \$ 120,000. Stations are oriented along a north-south line.

Ground receivers, set up at right angles to each other, pick up the 108 megacycle transmissions from the satellite. The direction of the satellite can be determined with this equipment to within three minutes of arc. The satellite-borne Minitrack transmitter will weigh only 13 ounces.

Each Minitrack station will scan the sky approximately 600 miles to the north and to the south, as well as 60 miles in both easterly and westerly directions. Ionospheric disturbances may prove troublesome at times during the tracking observations.

A simplified Mark II design may supplement the professional stations, being manned in part by amateurs.

B. Organization

At the present time seven Army, two Navy and one joint Navy-Air Force operated Minitrack stations will be established for the I.G.Y. period, largely in the form of a north-south radio fence.

Of these, eight will be on or near the 75th meridian, one near the 115th and one on the 50th, from near sea level to as high as 12,000 feet. As with the optical tracking organization, this will assure that no satellite passes through the fence unobserved. The U.S. Navy will supply Minitrack components and train the crews in its use. As tracking data are recorded at Minitrack stations, they will be forwarded directly (within less than 1/2 hour) to the Army Communications Control Center, Washington, D.C., and then relayed to the Vanguard Communications Control Center at Naval Research Laboratory.

C. Location of Sites¹

The following sites are now planned.

Country	Locality	Operating agency	Approximate latitude
USA.	Blossom Pt., Md.	Navy	38.4 degrees N
USA.	Navy Electronics Laboratory, San Diego, Calif.	Navy	32.6 degrees N
USA.	Ft. Stuart, Ga.	Army	32 degrees N
Cuba	Batista Field, Havana	Army	22.9 degrees N
Antigua Island	Coolidge Field	Navy-Air Force	17.1 degrees N
Panama	Rio Hato	Army	8.5 degrees N
Ecuador	Mt. Cotopaxi, Quito	Army	0.6 degrees S
Peru	Ancon, Lima	Army	11.8 degrees S
Chile	Antofagasta	Army	23.5 degrees S
Chile	Peldehue Military Reservation, Santiago	Army	33.5 degrees S

D. Details

The ground station will have an eight antenna array capable of angularly locating the satellite in north-south and east-west positions. Both eight and twelve-element dipole arrays are being tested. Electronic phase comparison equipment will be located in a trailer at each station. Other than angular measurements, Minitrack will report the exact time the satellite crosses the zenith point.

The Minitrack station will be given approximate information (arrival time to within six minutes, position to within several hundred miles) from satellite launch characteristics from the Vanguard multistage rocket. It will then have to acquire the orbital vehicle and supply both angular positions and rates to an accuracy sufficient for optical trackers.

¹ Additional sites, including those using Mark II equipment, may be established.

E. Characteristics

Transmitter	One-stage crystal controlled oscillator, with transistors
Transmitter weight	13 ounces (including batteries).
Output	20 milliwatts
Power supply (requires pressurization)	Mercury batteries (7 at 1.2 volts)
Precision of operation	3 minutes of arc, to possibly 20 seconds of arc at small zenith angles and at night
Ground equipment	Precision multiple array and electronic installation
Receiving antenna	Fan-shaped reception pattern, with wide dimension in a north-south plane. Its projection on celestial sphere is elliptical and, at expected satellite height, will have beam hundreds of miles wide
Transmitter, frequency	108 megacycles (UHF)
Transmitter space envelope	Cylinder, 5 by 3 inches
Satellite antennas	Four-element array (90° apart) on satellite
Transmitter lifetime	350 hours, continuous operation
Operating wavelength	3.05 meters
Precision of observations	3 minutes to 20 seconds of arc

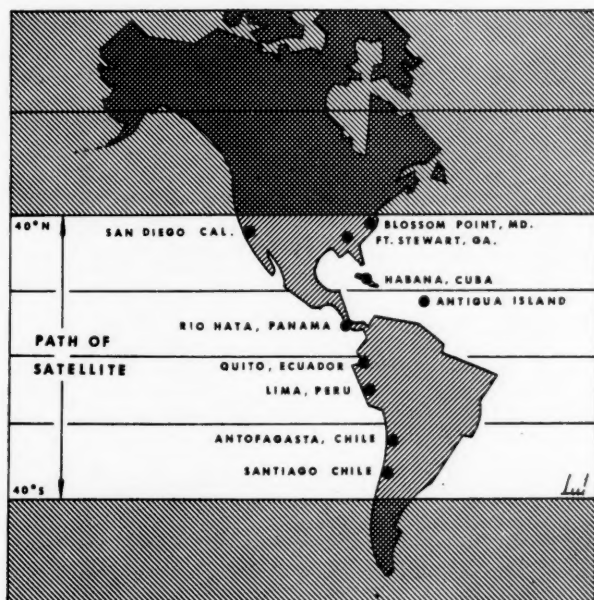


Fig. 12. Satellite Tracking Stations

F. Mark II, Simplified Minitrack System

Of lower accuracy, but adaptable to wider use, the Mark II Minitrack requires a pair of antennas located in an east-west plane separated by three to six hundred feet, a joining transmission line, sensitive receiver, recorder, and timing device.

Standard AM (and not phase comparison) techniques will be employed to amplify the signal to the recording level. The operation is as follows:

As the satellite crosses the field of the antenna it causes the difference in path lengths in two radio paths to scan at multiples of a wavelength. At each multiple, therefore, a null in the output of the hybrid occurs, and by measuring the angle made at the null, the satellite can be located.

The cost of this simplified Minitrack system has been estimated at about \$ 5000.00.

Acknowledgment

The author gratefully acknowledges the cooperation of officials and scientists of the following organizations in preparing this report to the "Astronautica Acta":

Aerojet-General Corporation

Atlantic Research Corporation

Brooks & Perkins, Inc.

General Electric Company

Glenn L. Martin Company

Minneapolis-Honeywell Regulator Company

Naval Research Laboratory

Smithsonian Astrophysical Observatory

University of Maryland

U. S. National Committee, International Geophysical Year

Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus

Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des JACOBISCHEN Parameters q . Von M. SCHULER und H. GEBELEIN. Mit einem englischen Text von LAURITZ S. LARSEN. Mit 11 Textabb., XXIV, 296 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 58.—.

Der numerischen Verwendung der elliptischen Funktionen stand bisher sehr oft der Umstand im Wege, daß alle vorhandenen Tafeln in keiner Weise den Ansprüchen der Praxis genügten. Die Schwierigkeit besteht darin, eine Tafel zu schaffen, die eine möglichst bequeme Interpolation (höchstens 2. Differenzen) mit einem mäßigen Umfang verbindet. Eine solche Tafel läßt sich durch Erweiterung der bisherigen Tafeln nicht schaffen.

Die vorliegenden neuen Tafeln der Verfasser erfüllen nun die genannten Bedingungen dadurch, daß statt des LEGENDRESCHEN Moduls θ der JACOBISCHE Parameter q eingeführt wird, der in den außerordentlich gut konvergierenden Reihen der JACOBISCHEN Thetafunktion auftritt. Allerdings hat die Verwendung von q zur unausbleiblichen Folge, daß alle Werte der Funktionen, bei denen q als Variable vorkommt, völlig neu berechnet werden mußten. Ferner waren zwei geeignete Hilfsfunktionen G und H einzuführen, die für die Interpolation nach beiden Veränderlichen sehr gut geeignet sind.

Die umfangreichen numerischen Neuberechnungen konnten, nachdem die Deutsche Forschungsgemeinschaft eine zehnstellige Rechenmaschine zur Verfügung stellte, durch Herrn GEBELEIN, der später noch von Herrn B. SCHNEIDER unterstützt wurde, durchgeführt werden.

Die beiden Funktionen G und H , die in den neunstelligen Tabellen I bis IV gegeben werden, sind Abkömmlinge der JACOBISCHEN Thetafunktion und wie folgt definiert:

$$G = - \frac{\theta_1(x) - 2q^{1/4} \sin x}{2q^{9/4} \sin x} \quad H = \frac{\theta_3(x) - 1}{q}.$$

Für sie können gut konvergierende Potenzreihen benutzt werden.

Die in der Praxis wichtigen elliptischen Funktionen sind die JACOBISCHEN Funktionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ und $\operatorname{dn} u$, deren Zusammenhang mit G und H leicht zu ermitteln ist.

In den Tabellen V und VI sind daher die achtstelligen Werte von $\lg \frac{\operatorname{sn} u}{\sin x}$, $\lg \frac{\operatorname{cn} u}{\cos x}$ und $\lg \operatorname{dn} u$ gegeben.

Das Tafelwerk wäre unvollständig, wenn man nicht gleichzeitig den Zusammenhang zwischen dem Parameter q und dem LEGENDRESCHEN Modul θ zur Verfügung hätte. Da auch hier die bisherigen numerischen Tafeln unzureichend sind, wird in Tabelle VII diese Umrechnung ausführlich gegeben.

Ausführliche Einleitung nebst klaren Beispielen (deutsch und englisch) erleichtern den Gebrauch der Tafeln. Überall dort, wo elliptische Funktionen in der Anwendung gebraucht werden, werden diese Tafeln von großem Nutzen sein. Man kann den Verfassern nur dankbar sein, daß sie hier eine unbequeme Lücke ausgefüllt haben.

K. SCHÜTTE, München

Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des JACOBISCHEN Parameters q . Von M. SCHULER und H. GEBELEIN. Mit einem englischen Text von LAURITZ S. LARSEN. Mit 11 Textabb., XI, 114 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 29.60.

Diese Tabellen sind im wesentlichen eine auf fünf Stellen beschränkte Ausgabe der acht, bzw. neunstelligen Tafeln derselben Verfasser. Tabelle I und II enthalten

die fünfstelligen Werte der Größen $\lg \frac{\sin u}{\sin x}$, $\lg \frac{\cos u}{\cos x}$ und $\lg \operatorname{dn} u$ in Abhängigkeit von q und $z = \cos 2x = \cos \pi/K \cdot u$.

In den Tabellen III und IV werden zwei neue Funktionen \overline{G} und \overline{H} gegeben, die gut interpolierbar sind, und aus denen durch eine kurze elementare Rechnung die JACOBISCHEN Thetafunktionen zu gewinnen sind. Auch \overline{G} und \overline{H} hängen von z und q ab, sind aber etwas anders definiert als die Funktionen G und H in der acht- bzw. neunstelligen Tafel.

In Tafel V folgt die Umrechnung zwischen dem LEGENDRESCHEN Modul Θ und dem JACOBISCHEN Parameter q , und in einer kurzen Tabelle VI findet man die notwendigen Koeffizienten für die Interpolation nach EVERETT.

Das fünfstellige Tabellenwerk ist vor allem für Physiker und Ingenieure bestimmt und wird überall ebenso willkommen sein wie die acht- bzw. neunstellige Tafel, sofern die geringere Genauigkeit ausreichend ist. K. SCHÜTTE, München

Spaceflight. Herausgegeben von der British Interplanetary Society, London. Vol. I, Heft 1 (Oktober 1956) und 2 (Januar 1957). Preis je Heft 3 s.

Die BIS hat sich im Herbst 1956 entschlossen, eine neue Zeitschrift für diejenigen Leser herauszugeben, denen das wissenschaftlich-technische Niveau des ausgezeichneten ordentlichen Gesellschaftsorgans „Journal of the British Interplanetary Society“ zu schwierig für ein ausreichendes Verständnis ist. Als Herausgeber zeichnet der bekannte englische Astronom PATRICK MOORE, F.R.A.S. Rein wissenschaftliche und technische Veröffentlichungen jedoch sollen dem genannten J. Brit. Interplan. Soc. reserviert bleiben.

In einer Zeit, in der die Bevölkerung aller Länder „weltraumbewußt“ („space conscious“) wird, kann die Bedeutung der hohen Aufgabe, *richtige* Informationen über die Fortschritte der Astronautik und aller in ihr vertretenen Disziplinen *möglichst weit* zu verbreiten, nicht hoch genug eingeschätzt werden, insbesondere im Hinblick auf die Erziehung der öffentlichen Meinung und die Ausmerzung verbreiteter Irrtümer und Mißverständnisse.

Die beiden ersten Ausgaben der neuen Zeitschrift enthalten eine ganze Reihe von Artikeln, z. B. über Ziele der Raumfahrt, Funktion der Rakete, das Vanguard-Projekt, Berufsmöglichkeiten in der Astronautik, die Marsoberfläche, die Beobachtung der künstlichen Erdsatelliten, den Mond, das V 2-Triebwerk, Pioniere der Weltraumfahrt (ZIOLKOWSKI und Dr. GODDARD), die schweizerische Oerlikon-Rakete, den 7. Internationalen Astronautischen Kongreß 1956 in Rom. Zahlreiches gutes Bildmaterial bereichert die Texte und — was in den englischsprachigen Zeitschriften oft so sympathisch berührt — auch der Humor kommt in Form lebenswürdiger Scherzzeichnungen zur Geltung. Zu erwähnen sind auch noch eine Übersicht über die Erscheinungen des gestirnten Himmels sowie eine Übersicht über astronautische Literatur und Buchbesprechungen. Alle Artikel, die von bekannten englischen und amerikanischen Experten verfaßt sind, sind angenehm lesbar und gut verständlich.

Es ist gewiß, daß sich diese neue Zeitschrift viele neue Freunde erwerben wird, auch in den nicht-englischsprachigen Ländern. Die BIS dürfte, wenn sie auf diesem Wege fortfährt, ihr mit „Spaceflight“ gestecktes Ziel in dankenswerter Weise erreichen. F. HECHT, Wien

Zur Flugmechanik der Photonenraketen¹

Von

Eugen Sänger², GfW

(Mit 2 Abbildungen)

(Eingegangen am 5. Mai 1956)

Zusammenfassung. Bei den noch hypothetischen Photonenraketen ist die Strahlgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit, so daß sich auch ihre Fahrtgeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nähern kann. Aus den Gesetzen der klassischen Mechanik würde damit folgen, daß die begrenzte Dauer des menschlichen Lebens und das aus technischen Gründen begrenzte Massenverhältnis der Rakete Reichweiten von einigen Lichtjahrzehnten, also über einen sehr kleinen Raum der Galaxis und nur bis zu den allernächsten Fixsternen, erlauben könnten. Aus den Gesetzen der relativistischen Mechanik folgt jedoch bei derart lichtnahen Fahrtgeschwindigkeiten eine erhebliche Dilatation der Eigenzeit an Bord des Fahrzeuges gegenüber der irdischen Zeit, so daß das Leben der Besatzung und der Antrieb des Raketenmotors wesentlich langsamer abrollen, als der irdischen Zeitrechnung entspricht. Dies hat zur Folge, daß man innerhalb der Lebensdauer der Besatzung und mit endlichem Massenverhältnis der Rakete alle denkbaren Entfernungen des Kosmos bis zu den Millionen Lichtjahre entfernten Nebeln zurücklegen kann, also Raumfahrzeuge sich, technisch und vom Standpunkt der Besatzung gesprochen, *scheinbar mit vielfacher Lichtgeschwindigkeit bewegen können*.

Abstract. The yet hypothetical photon rockets have jet-velocities equal to the velocity of light, so that also their flight velocities may approach the optic velocity.

From the laws of classical mechanics, it would follow that the limited human life-time and the limited mass-ratio of the rocket would permit ranges of some tenths of light years, i.e. over a very limited space of our galaxy and to the nearest fixed stars only.

From the laws of relativistic mechanics, however, for those very near optic-velocities a considerable dilatation of proper time on Board of the vehicle relative to the terrestrial time occurs, so that life of the crew and action of the rocket-motor run slower, than in the corresponding terrestrial time-scale.

From this it follows that within the life-span of the crew and with limited mass-ratios of the rocket, every conceivable distance in space, up to the nebulae millions of light-years distant can be covered, so that, expressed in technical terms, and from the standpoint of the crew, the vehicle *seems to be able to move with considerable super optic-velocity*.

Résumé. Les fusées à photons, encore hypothétiques en ce moment, auront des vitesses de jet égales à la vitesse de la lumière. Leur vitesse de vol peut donc aussi s'approcher de la vitesse de la lumière.

¹ Vorgetragen beim VII. Internationalen Astronautischen Kongreß in Rom, September 1956.

² Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, Stuttgart-Flughafen, Bundesrepublik Deutschland.

Il résulterait en ce cas des lois de la mécanique classique, que la durée limitée de la vie humaine et le rapport massique limité de la fusée ne permettraient que des portées de l'ordre de quelques dizaines d'années lumières. On ne pourrait donc se mouvoir que dans un secteur bien restreint de l'espace de la galaxie et seulement jusqu'aux étoiles fixes les plus proches.

Mais pour ces vitesses de vol il résulte des lois de la mécanique relativiste une dilatation considérable du temps propre à bord du véhicule de sorte, que la vie de l'équipage et l'action du moteur fusée sont fortement ralentis par rapport à l'échelle du temps terrestre.

Il s'en suit, que pendant la durée de vie de l'équipage humain, et avec un rapport de masse de la fusée limité, on peut couvrir toutes les distances imaginables de l'espace cosmique, jusqu'aux nébuleuses distantes de millions d'années lumières. Ainsi ces astronefs *peuvent, semble-t-il, dépasser à volonté la vitesse de la lumière*, si l'on s'exprime de manière technique, mais non physiquement relativiste.

Wir benützen gewöhnlich das Wort Astronautik, das heißt Sternenfahrt, heute in einem — der technischen Lage entsprechend — sehr eingeschränkten Sinn für das Übergangsgebiet von Luftfahrt zu Raumfahrt und für die Probleme der Erdaußenstationen. Schon die Erörterung interplanetarer Fahrten setzt auch heute noch den Wissenschaftler der Gefahr aus, für einen Phantasten zu gelten, so wie er dies vor 25 Jahren selbstverständlich war, wenn er sich mit Überschallflug, Höhen-Raketen oder künstlichen Erdsatelliten befaßte. Den eigentlichen Inhalt des kühnen Wortes Astronautik, den Flug zu den Fixsternen, zu diskutieren, haben bisher nur wenige sehr unabhängige Geister gewagt, mit dem Risiko, einem Schicksal GIORDANO BRUNOS nahezukommen. Dennoch müssen wir diesen Mut nun fassen, um jene Übersicht über die zukünftigen Möglichkeiten zu gewinnen, die es uns erlaubt, die technischen Entwicklungen auch weiterhin richtig zu steuern.

Unsere modernen Physikern ist es gelungen, in ihren Kernforschungsgeräten Massenstrahlen verschiedener schwerer Partikel mit Geschwindigkeiten herzustellen, die sich der Lichtgeschwindigkeit nähern, und andererseits ist es ihnen gelungen, stationäre Plasmentemperaturen von solcher Höhe künstlich zu erzeugen, daß die Strahlungsdrücke dieser heißen Gase von technischer Größenordnung werden. Unsere modernen Raketeningenieure sind den Physikern dicht auf den Fersen, diese fast oder ganz lichtschnellen Massenstrahlen für ihre Strahlantriebe anzuwenden, wobei ihnen die sich rasch entwickelnde Technologie der Kernenergie zu Hilfe kommt.

Wir wissen genau, welch bescheidenes Massenverhältnis eine Rakete braucht, damit ihre Fluggeschwindigkeit gleich der Auspuffgeschwindigkeit ihres Antriebsstrahles wird, und sehen daher die nicht allzu entfernte Möglichkeit, daß sich auch die Fluggeschwindigkeit eines Raketenfahrzeuges im Weltraum der Lichtgeschwindigkeit nähern kann. Damit tritt das Problem der Erreichbarkeit der Fixsterne in unseren technischen Gesichtskreis.

Die Astronomen geben die Entfernungen der Fixsterne meist in Lichtjahren an. Die unserer Sonne nächststehende „Proxima Centauri“ ist beispielsweise etwa 4,3 Lichtjahre entfernt; die Distanz bis zum Zentrum unseres Milchstraßensystems beträgt rund 30 000 Lichtjahre, bis zum Andromedanebel sind es 750 000 Lichtjahre. Die Ausdehnung des gesamten Weltalls wird auf einige Milliarden Lichtjahre geschätzt. Nach neuerer Ansicht wären die letzten drei Angaben sogar zu verdoppeln.

Da unser Raumfahrzeug relativ zur Erde äußerstenfalls mit fast Lichtgeschwindigkeit fliegen kann, scheint es also zunächst, als ob die Länge eines Menschenlebens die möglichen Reichweiten des Fahrzeuges auf einige Licht-

jahrzehnte, also auf einen winzigen Raumausschnitt unseres Milchstraßensystems in der Umgebung unserer Sonne beschränkt. Demnach wäre also mit der äußersten technischen Vollendung unserer Raketenantriebe, die wir bei vollständiger Zerstrahlung aller mitgeführten Treibstoffe jemals erhoffen könnten, anzunehmen, daß uns wohl die nächsten Fixsterne unserer Sonnenumgebung erreichbar werden könnten, daß uns aber schon weitere Bereiche unserer Galaxis, und erst recht fremde Spiralnebel grundsätzlich unerreichbar bleiben.

Es soll Gegenstand meines Vortrages sein, Ihnen zu zeigen, daß diese Beschränkung tatsächlich nicht besteht, daß die normale Lebensdauer der menschlichen Besatzung eines solchen Fahrzeuges vielmehr ausreicht, jede beliebige astronomische Distanz nicht nur bis zu anderen Galaxien, sondern bis an die äußersten Grenzen des Kosmos zu durchmessen, das Fahrzeug sich *scheinbar* also mit vielfacher Überlichtgeschwindigkeit bewegen kann, und daß das dazu erforderliche Massenverhältnis der Rakete zwar groß, aber durchaus noch vorstellbar wird. Der Grund für diese erstaunlichen Tatsachen ist, daß für die Flugmechanik dieser Fahrzeuge nicht mehr die Gesetze der klassischen, NEWTONschen Mechanik gelten, sondern die Gesetze der speziellen Relativitätsmechanik EINSTEINS.

Wir setzen den Grenzfall eines Raketenfahrzeuges mit vollständiger Massenzerstrahlung als vorhanden voraus, bei dem also die an Bord des Fahrzeuges mitgeführten Treibstoffmassen vollständig in Photonen oder Neutrinos, Antineutrinos, Gravitonen usw. verwandelt und daher mit Lichtgeschwindigkeit in einer vorgewählten Richtung abgestrahlt werden.

Die Fälle anderer, von Eins verschiedener Massen-Energie-Umwandlungsgrade, wie etwa jener des Kernzerfalls, der Kernspaltung, der Kernsynthese usw. mit entsprechend kleineren Auspuffgeschwindigkeiten, bzw. größeren Massenverhältnissen, sind dann leicht nachzurechnen [1].

Wir setzen ferner ein solches Raketenfahrzeug im schwerefreien und widerstandsfreien Weltraum unter der Wirkung beispielsweise des Photonen-Antriebes in gerader Richtung fliegend voraus und sehen also auch von dem „Strömungswiderstand“ des interstellaren Gases ab.

Auf das mit dem Fahrzeug fest verbundene Koordinatensystem, das sogenannte Eigensystem, bezogen, verwenden wir zunächst die bekannte klassische Raketen Grundgleichung zwischen dem Verhältnis m_e/m_{e0} der jeweiligen zur anfänglichen Eigenmasse des Fahrzeuges und dem Verhältnis einer erreichten Eigenfahr Geschwindigkeit v_e zur Auspuffgeschwindigkeit c , die in diesem Grenzfall also gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.

$$m_e/m_{e0} = e^{-v_e/c}. \quad (1)$$

Wir benützen das physikalisch sinnlose Wort „Eigengeschwindigkeit“ für den, wie sich noch herausstellen wird, sehr zweckmäßigen Parameter v_e , um anzudeuten, daß es sich dabei nicht um eine wirkliche Geschwindigkeit im physikalischen Sinne handelt.

Die zahlenmäßige Abweichung dieses Parameters v_e von der wirklichen Relativgeschwindigkeit v des Fahrzeuges zur Erde ist denn auch nicht mehr vernachlässigbar, sobald die Fahr Geschwindigkeit v größer als etwa 10% der Lichtgeschwindigkeit wird, und wir sind daher nicht beunruhigt, wenn wir nach Gl. (1) feststellen, daß für $m_e/m_{e0} = e^{-1}$ die Eigenfahr Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit wird, für $m_e/m_{e0} = e^{-10}$ gleich der zehnfachen Lichtgeschwindigkeit usw.

Immerhin wird man versuchen, die Natur dieser merkwürdigen Eigengeschwindigkeit v_e durch Messungen an Bord des Fahrzeuges besser zu verstehen.

Nehmen wir mit Recht an, die Besatzung hätte die üblichen Chronometer an Bord und könnte damit die Eigenzeit messen, etwa seit Beginn des Antriebsvorganges

$$t_e. \quad (2)$$

Nehmen wir weiter an, sie hätte auch die üblichen Beschleunigungsmesser an Bord, etwa eine kleine Masse an einer Feder, und könnte damit auch ihre Eigenbeschleunigung messen

$$b_e. \quad (3)$$

Mit diesen beiden Werten wird die Besatzung also zu rechnen beginnen und zunächst ihre Eigengeschwindigkeit v_e in gewohnter Weise feststellen zu

$$v_e = \int_0^{t_e} b_e dt_e. \quad (4)$$

Das Ergebnis dieser Rechnung wird in erfreulicher Übereinstimmung mit der Rechnung nach Gl. (1) über die durch den Antrieb erreichte Eigengeschwindigkeit v_e stehen, und wieder wird die Besatzung nach entsprechender Zeit feststellen, daß v_e die Lichtgeschwindigkeit überschreitet.

Die Besatzung kann ihre beiden Bordmessungen sogar noch weiter auswerten und einen zurückgelegten „Eigenweg“ s_e ausrechnen zu

$$s_e = \int_0^{t_e} \int_0^{t_e} b_e dt_e dt_e = \int_0^{t_e} v_e dt_e, \quad (5)$$

der ebenso fiktiv ist, wie der Begriff der Eigengeschwindigkeit, der aber ebenso wie dieser ein Maß für den Treibstoffverbrauch m_e/m_{e0} des Raketenfahrzeuges darstellt.

Die Besatzung braucht gegen ihre Instrumentenmessungen keineswegs mißtrauisch zu sein, denn sie kann z. B. ihre Chronometermessungen etwa an der Zahl ihrer Pulsschläge prüfen und mit dem gesamten Ablauf ihres gewohnten Lebensrhythmus vergleichen, und die Eigenbeschleunigung wird sie erst recht physiologisch empfinden, ja sie wird ihren Raketenantrieb sogar so zu regeln versuchen, daß die Fahrzeugeigenbeschleunigung möglichst konstant bleibt, ggf. sogar genau bei dem der Besatzung von der Erde her angenehmsten Wert $b_e = g = 9,81 \text{ m/sec}^2$.

In diesem Falle $b_e = \text{konst.}$ werden die abgeleiteten Messungen von Eigengeschwindigkeit v_e und Eigenweg s_e besonders einfach zu ermitteln sein zu

$$v_e = b_e t_e \quad (6)$$

$$s_e = b_e t_e^2/2 = v_e^2/2 b_e, \quad (7)$$

also mittels der bekannten klassischen Beziehungen gleichförmig beschleunigter Bewegung.

Eine solche Fahrt wird natürlich auch von der Erde aus mit umfangreichen Instrumenten sorgfältig verfolgt und vermessen werden, und vielleicht wird man vereinbaren, daß die Messungen zu bestimmten Zeitpunkten, etwa nach bestimmtem Treibstoffverbrauch, der durch die jeweiligen m_e/m_{e0} charakterisiert sei, zwischen erdfestem Beobachter und Besatzung ausgetauscht werden.

Dabei werden sich nun allmählich ganz erhebliche Diskrepanzen herausstellen zwischen den von der Erde aus vorgenommenen Messungen der abge-

laufenen Zeit t , der Fahrzeugbeschleunigung b , der Fahrzeuggeschwindigkeit v und dem zurückgelegten Weg s , und den entsprechenden, nur an Bord ohne jede Beachtung der Umgebung vorgenommenen entsprechenden Bestimmungen t_e , b_e , v_e und s_e der Besatzung.

Nach einer entsprechenden Zahl von Messungen wird man feststellen, daß zwischen den jeweiligen Meßreihen der Erdbeobachter und der Besatzung die bekannten (1), für beliebige Eigenbeschleunigungen zutreffenden relativistischen Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} v/c &= \frac{1 - (m_e/m_{e0})^2}{1 + (m_e/m_{e0})^2} = \\ &= \tanh(v_e/c) = \\ &= \tanh(-\ln m_e/m_{e0}) \end{aligned} \quad (1a)$$

$$dt/dt_e = \cosh(v_e/c) \quad (2a)$$

$$b/b_e = \cosh^{-3}(v_e/c) \quad (3a)$$

$$ds/ds_e = (\sinh v_e/c)/(v_e/c). \quad (5a)$$

Hinter diesen harmlosen Beziehungen verbirgt sich die ganze Mystik des Erlebens der Besatzung unseres Raketenfahrzeuges, die allerdings in ihrer vollen Wucht erst bei jenen hohen Fluggeschwindigkeiten v zum Ausdruck kommt, die sich der elektromagnetischen Signalgeschwindigkeit c nähern, wo also infolgedessen jede Nachrichtenverbindung zwischen Erdbeobachter und Besatzung abreißt und damit auch kein unmittelbarer Vergleich der gegenseitigen Messungen mehr möglich ist.

Im schwere- und widerstandsfreien Weltraum scheinen dem baulichen Verhältnis m_e/m_{e0} zwischen End- und Anfangsmasse des Fahrzeuges kaum Grenzen gesetzt, besonders wenn die zu zerstrahlenden Treibstoffe selbst feste und sich selbst tragende Körper sind, die erst im Laufe von Jahren verbraucht werden.

Deshalb sind in Abb. 1 zunächst die m_e/m_{e0} in weiteren Bereichen aufgetragen über den damit erreichbaren Verhältnissen der Eigengeschwindigkeit v_e , bzw. der Relativgeschwindigkeit v zur Lichtgeschwindigkeit c , und zwar mit Hilfe der Gln. (1), bzw. (1a). Wir werden diese Verhältnisse kurz als EINSTEIN-Zahlen des Raumfluges bezeichnen, in Analogie zu den MACH-Zahlen des atmosphärischen Fluges.

Während die Eigen-EINSTEIN-Zahl also beliebige Werte über 1 annehmen kann, nähert sich die Relativ-EINSTEIN-Zahl naturgemäß dem Wert 1, ohne ihn je zu erreichen. Man erkennt schon hier die praktischen Annehmlichkeiten der

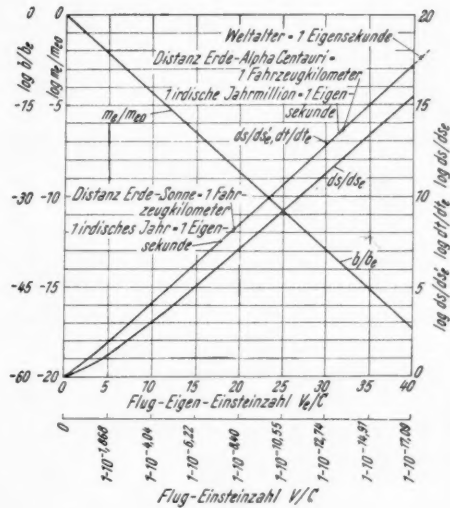


Abb. 1. Adiabatische Photonenrakete; Zusammenhang der erreichten Flug-EINSTEIN-Zahl v/c und Flug-Eigen-EINSTEIN-Zahl v_e/c mit dem Massenverhältnis m_e/m_{e0} und mit den Verhältnissen der Relativ- zur Eigen-Beschleunigung b/b_e , der Relativ- zur Eigenzeit t/t_e , des Relativweges zum Eigenweg ds/ds_e und der Relativdistanzen ds/ds_e von der Erde und vom Fahrzeug

Wahl einer Eigengeschwindigkeit, die es verhindert, daß bei den zu untersuchenden Bereichen der EINSTEIN-Zahlen diese völlig unaussprechbare Zahlenwerte annähmen, wenn man sich auf die Relativgeschwindigkeiten bezöge.

Damit hängt zusammen, daß die von der Erde aus beobachtete Fahrzeugbeschleunigung b sehr rasch außerordentlich viel kleiner wird, als die an Bord des Fahrzeuges erlebte und empfundene Eigenbeschleunigung b_e . Während bei beispielsweise konstanter Eigenbeschleunigung b_e die Eigengeschwindigkeit v_e proportional der Eigenzeit t_e zunimmt, scheint dem irdischen Beobachter die Relativgeschwindigkeit v des Fahrzeuges kaum mehr zu wachsen, weil sie sich asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Noch viel eigenartiger sind jedoch die Verhältnisse der Zeiten und Entfernungen, wenn man sie von den Standpunkten des irdischen Beobachters und der Besatzung aus vergleicht.

Die Auftragung des Verhältnisses dt/dt_e des Beobachterzeit-Elementes zum Besatzungszeit-Element nach Gl. (2 a) in Abb. 1 zeigt, daß beispielsweise bei $v_e/c = 18$ dem Beobachter ein Jahr vergeht, während die Besatzung nur eine Sekunde erlebt.

Bei $v_e/c = 32$ würde auf der Erde eine Million Jahre vergehen, die der Fahrzeugbesatzung wie eine Sekunde erscheinen.

Den gedachten Bewohnern eines Photons, für das ja $v_e/c = \infty$ und damit $v/c = 1$ ist, würde das, was wir auf Erden Zeit nennen, vollkommen stillstehen, also überhaupt nicht existieren; diese Wesen befänden sich zeitlich außerhalb unserer Welt, ihr Zeitablauf hätte zu unserem keinerlei Beziehung mehr. Nehmen wir beispielsweise an, ein Lichtquant würde von der Erde zu einem zehn Lichtjahre entfernten Stern gesandt und von dort sofort zur Erde zurückreflektiert. Es würde demnach nach 20 Jahren wieder auf der Erde ankommen. Einem Fahrgast auf diesem Photon würde jedoch während dieser Reise überhaupt keine Zeit vergehen, seine Uhr würde keinen einzigen Pendelschlag tun und er wäre um keine Sekunde gealtert. Er würde den Eindruck gewinnen, sich während dieser Reise mit unendlich hoher Geschwindigkeit bewegt zu haben. Diesen fremdartigen Zustand der Photonenbewohner kann zwar die Besatzung unseres Fahrzeuges niemals völlig erreichen, aber sie nähert sich ihm bei hohen EIGEN-EINSTEIN-Zahlen des Fluges doch sehr beträchtlich. Die Lebensdauer der Besatzung erreicht für uns Erdenwesen tatsächlich jene unsterblicher Götter; die Besatzung selbst hat aber nicht das Empfinden, anders zu leben, als sie es seit je auch auf der Erde tat, und wird natürlich auch nicht älter, als sie sonst auf der Erde geworden wäre.

Bei Betrachtung der Wege ds und ds_e tritt nun insofern eine neue Komplikation auf, als wir hier noch eine dritte Wegmessung ds_e' beachten müssen.

Die Bestimmung der kinematischen Eigengrößen der Fahrzeugbesatzung t_e , b_e und der daraus abgeleiteten Eigengrößen v_e und s_e erfolgt ohne jede Bezugnahme auf die Umgebung des Fahrzeuges, also ohne Beobachtung von Vorgängen außerhalb des Fahrzeuges. Die Messung der Relativgrößen t , b , v und s von der Erde zum Fahrzeug erfolgt mittels der üblichen, z. B. astronomischen Geräte.

Wenn wir nun annehmen, daß die Besatzung an Bord ebenfalls über derartige Geräte verfügt und entsprechende Messungen t_e' , b_e' , v_e' und s_e' vom Fahrzeug zur Erde vornehmen kann, so interessiert natürlich das Ergebnis dieser Messungen im Verhältnis zu den bisher behandelten Relativ- und Eigengrößen.

Tab. 1 zeigt eine Zusammenstellung der insgesamt benützten kinematischen Größen des Fahrzeuges:

Tabelle 1. Zusammenstellung der kinematischen Größen des Photonen-Fahrzeuges

	Eigen- messung Fahrzeug		Messung Fahrzeug → Erde		Messung Erde → Fahrzeug	Eigenzeit- Geschwin- digkeit
Zeit	t_e	=	t_e'	=	t	
Beschleunigung	b_e		b_e'	=	b	
Geschwindigkeit	v_e		v_e'	=	v	$v_{ez} = s/t_e$
Weg	s_e		s_e'		s	

Es leuchtet sofort ein, daß die so gemessene Zeit t_e' nichts anderes als unsere Eigenzeit t_e ist, also $t_e' = t_e$, und daß die vom Fahrzeug zur Erde gemessenen Relativbeschleunigungen b_e' und Relativgeschwindigkeiten v_e' identisch sein müssen mit den in umgekehrter Richtung gemessenen entsprechenden Relativgrößen b und v , also $b_e' = b$ und $v_e' = v$, da es für diese Messungen ja offenbar gleichgültig sein muß, ob man das Fahrzeug oder die Erde als in Ruhe befindlich betrachtet, und das jeweils andere Objekt in Bewegung.

Etwas anders wird die Sache, wenn man die Länge einer bestimmten, in der Flugbahn liegenden, und relativ zur Erde ruhenden Strecke, z. B. die Entfernung S der Erde vom Zielpunkt der Reise vom Fahrzeug aus mißt. Jedes Element ds dieser Strecke bewegt sich dann relativ zum Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v und unterliegt damit der relativistischen Längendilatation

$$ds/ds_e' = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \cosh(v_e/c) = dt/dt_e. \quad (8)$$

Vom bewegten Fahrzeug aus gemessen, erscheint die zur Erde ruhende Strecke oder Entfernung daher kürzer, als von der ruhenden Erde aus gemessen, und zwar im selben Verhältnis, wie sich die Zeitmessungen von beiden Standpunkten aus unterscheiden.

Die Auftragung des Verhältnisses ds/ds_e' der vom erdfesten Beobachter gemessenen Distanzen zu den von der Besatzung gemessenen Distanzen nach Gl. (8) in Abb. 1 deckt sich daher mit der Kurve dt/dt_e und zeigt, daß beispielsweise etwa bei $v_e/c = 19$ eine astronomische Entfernung wie jene der Erde von der Sonne der Besatzung nur 1 km lang erscheint, und daß bei $v_e/c = 32$ die Entfernung unserer Sonne von ihrer nächsten Nachbarsonne, der Proxima Centauri — die die irdischen Astronomen mit $4\frac{1}{3}$ Lichtjahren feststellen — für die Besatzung unseres Fahrzeuges ebenfalls nur einen Kilometer beträgt. Diese Entfernungen werden bei den genannten Eigengeschwindigkeiten in etwa $0,317 \cdot 10^{-5}$, bzw. $5,36 \cdot 10^{-5}$ Eigensekunden zurückgelegt.

Unseren gedachten Bewohnern eines Photons, die sich mit diesem Lichtquant relativ zu uns mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, würden alle Längen unserer Welt zu Null zusammenschrumpfen, diese Wesen würden also auch räumlich außerhalb unserer Welt leben.

Wenn unser früher erwähnter Fahrgast von seinem Photon aus eine Messung der für uns 10 Lichtjahre betragenden Länge seiner Reisestrecke vornehmen könnte, so würde er auf Grund dieser Messung zu dem Eindruck gelangen, daß er in der Zeit Null auch den Weg Null zurückgelegt hätte, seine Welt hätte keinerlei Beziehung mehr zu der unseren. Auch diesen merkwürdigen Zustand kann die Besatzung unseres Fahrzeuges zwar niemals vollkommen erreichen, aber sie nähert sich auch ihm bei höheren Eigen-EINSTEIN-Zahlen des Fluges recht beträchtlich.

Diese bisher dargestellten Verhältnisse der relativistischen Zeit-, bzw. Längen-Dilatation zeigen überwiegend philosophische oder selbst mythologische Aspekte. Eine sehr konkret technische Seite des Problems von ganz außerordentlich weittragender technischer Bedeutung offenbart sich jedoch bei der Betrachtung des Verhältnisses ds/ds_e der astronomischen Entfernungen s zu den Eigenwegen s_e der Rakete.

Die astronomische Entfernung s bleibt unter allen Umständen die Grundlage der Projektierung einer Raumfahrt und der Maßstab ihres Erfolges. Es wäre völlig sinnlos, an ihrer Stelle etwa die jeweilige, von der Fluggeschwindigkeit abhängige Relativdistanz s_e' zu verwenden, nur um zu vermeiden, daß man gezwungen ist, von Fluggeschwindigkeiten zu sprechen, die höher als die Lichtgeschwindigkeit sind.

Der Eigenweg s_e dagegen ist als Weg eine völlig fiktive Zahl ohne physikalische Bedeutung, er ist jedoch nach Gl. (1) und (5) der Maßstab für den erforderlichen Treibstoffverbrauch des Fahrzeuges.

Das Verhältnis ds/ds_e nun der beiden Wege ist in Abb. 1 als dritte Kurve eingetragen, die zeigt, wie ungeheuerlich viel größer die astronomischen Distanzen gegenüber den Eigenwegen bei höheren EINSTEIN-Zahlen werden. Dies hat zur Folge, daß man mit durchaus endlichen Eigenwegen und damit endlichem Treibstoffverbrauch unbegrenzte astronomische Entfernungen zurücklegen kann.

Nur eines der unzähligen denkbaren Fahrtbeispiele, die sich aus den erörterten kinematischen Grundverhältnissen ableiten lassen, wollen wir hier kurz quantitativ betrachten: Die Reise über eine astronomische Distanz S , bei der das Fahrzeug auf der ersten Hälfte der Reise mit konstanter Eigenbeschleunigung b_e beschleunigt werde, und auf der zweiten Weghälfte mit eben derselben Eigenbeschleunigung verzögert, und auf der der Strömungswiderstand der interstellaren Materie wieder keine Rolle spielen möge.

Man erhält die kinematischen und dynamischen Fahrtverhältnisse leicht durch Integration der vorerwähnten Grundbeziehungen, insbesondere die hier vor allem interessierenden Größen:

Eigenzeit der gesamten Reise T_e :

$$T_e = \frac{2c}{b_e} \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{b_e S}{2c^2} \right), \quad (9)$$

bzw. für $b_e S/2c^2 \gg 1$:

$$T_e \sim \frac{2c}{b_e} \ln \frac{b_e S}{c^2} = \frac{c}{b_e} \ln \frac{m_{e0}}{m_e}. \quad (9a)$$

Nötiges Massenverhältnis m_e/m_{e0} des Fahrzeuges:

$$\frac{m_{e0}}{m_e} = \exp \left[2 \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{b_e S}{2c^2} \right) \right], \quad (10)$$

bzw. für $b_e S/2c^2 \gg 1$:

$$\frac{m_{e0}}{m_e} \doteq \left(\frac{b_e S}{c^2} \right)^2. \quad (10a)$$

Höchstauftretende Eigen-EINSTEIN-Zahl in Wegmitte:

$$\left(\frac{v_e}{c} \right)_{\max} = \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{b_e S}{2c^2} \right), \quad (11)$$

bzw. für $b_e S/2c^2 \gg 1$:

$$\left(\frac{v_e}{c} \right)_{\max} \doteq \ln \frac{b_e S}{c^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{m_{e0}}{m_e}. \quad (11a)$$

Zunächst erkennt man aus Gl. (10 a), daß für große Distanzen bei gegebenem Massenverhältnis die Reichweite S umgekehrt proportional der angewendeten Eigenbeschleunigung b_e ist, also geringe Eigenbeschleunigungen sehr günstig für die Reichweite sind. Andererseits folgt allerdings aus Gl. (9 a), daß die Reisedauern T_e ebenfalls umgekehrt proportional b_e sind, also durch kleine Eigenbeschleunigungen im selben Maß wie die Reichweiten vergrößert werden. Die Eigenzeitgeschwindigkeit $v_{ez} = S/T_e$ ist unabhängig von b_e .

Die erörterten drei Größen sind in Abb. 2 für $b_e = g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, also eine Eigenbeschleunigung in Höhe der normalen Erdbeschleunigung über allen vorstellbaren astronomischen Distanzen S bis zum vermuteten Gesamtumfang des Weltalls, zahlenmäßig aufgetragen und geben allerhand Stoff zu weiterem Nachdenken.

Um die Abszissenachse etwas lebendiger zu gestalten, sind einige konkrete astronomische Entfernungen als Beispiele eingetragen, wie jene zwischen zwei Erdantipoden (20 000 km), zwischen Erde und Mond (400 000 km), zwischen Erde und Sonne (150 Millionen km), zwischen unserem Sonnensystem und dem nächsten der Proxima Centauri (4,3 Lichtjahre), zwischen Sonne und dem Zentrum unseres Milchstraßensystems (30 000 Lichtjahre), zwischen Erde und dem Andromedanebel (etwa 750 000 Lichtjahre) und endlich der vermutete Gesamtumfang des Weltalls (3 Milliarden Lichtjahre).

Wie Abb. 2 zeigt, bewegen sich die Eigenfahrzeiten T_e unter den getroffenen Annahmen für diese sieben Reisen zwischen 47,2 Minuten und 41,9 Jahren.

Die Länge eines Menschenlebens würde also genügen, ein ganzes statisches Weltall zu umfahren. Ob allerdings nach der Rückkehr der Besatzung unser Sonnensystem noch stünde, ist mehr als fraglich, denn in diesem wären inzwischen ja mehr als 3 Milliarden Jahre vergangen. Während dieser Zeit befand sich die Fahrzeugbesatzung zeitlich nahezu außerhalb unseres Weltsystems, also in einer anderen Welt.

Die Besatzung wird bei dieser letzten Reise geneigt sein, die relative astronomische Distanz von 3 Milliarden Lichtjahren mit der Dauer ihrer Reise von 41,9 Eigenjahren zu vergleichen und das Empfinden haben, mit einer mittleren Reisegeschwindigkeit von 720millionenfacher Lichtgeschwindigkeit gefahren zu sein. Wie unsere Eigengeschwindigkeit ist selbstverständlich auch diese „Eigenzeit-Geschwindigkeit“ keine reale physikalische Geschwindigkeit, da man bei ihr ja die im Erdsystem gemessene astronomische Distanz durch die im Fahr-

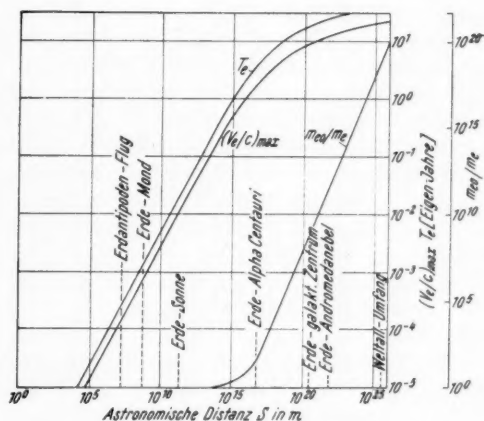


Abb. 2. Adiabatische Photonenrakete; Fahrten mit $b_e = 10 \text{ m/sec}^2$ Eigenbeschleunigung bis zur halben astronomischen Zieldistanz S und $b_e = 10 \text{ m/sec}^2$ Eigenverzögerung auf der zweiten Distanzhälfte, Abhängigkeit des erforderlichen Massenverhältnisses m_{e0}/m_e , der gesamten Eigenreisezeit T_e und der höchsten, in Eigenweg-Mitte auftretenden Eigen-EINSTEIN-Zahl $(v_e/c)_{\max}$ von der gesamten astronomischen Distanz S

zeugsystem gemessene Eigenzeit der Reise dividiert. Dennoch ist diese Eigenzeitgeschwindigkeit ein sehr treffender Ausdruck für das tatsächliche Erleben der Besatzung.

Diese Eigenzeitgeschwindigkeit, die die Lichtgeschwindigkeit millionenfach übersteigen kann, hat hervorragende praktische Bedeutung, weil sie die Verknüpfung der vom irdischen Astronomen gelieferten Reisedistanz ds mit der von der Besatzung erlebten Eigenzeit dt_e darstellt, $v_{ez} = ds/dt_e$, und damit das Besatzungsempfinden für deren Reisegeschwindigkeiten wiedergibt, was für v_e nicht zutrifft. Diese letztere Eigengeschwindigkeit v_e charakterisiert dagegen den Treibstoffverbrauch besser.

Man erkennt aus den beiden Abb. 1 und 2, daß bei den hier besonders interessierenden Geschwindigkeitsbereichen $v_e/c = 10^0$ bis 10^2 sowohl die Angabe der Relativgeschwindigkeit v als auch der Eigenzeitgeschwindigkeit v_{ez} zu sehr unhandlichen Zahlen führen würde. Neben ihrer Bedeutung als Maß für den Treibstoffverbrauch empfiehlt auch dieser praktische Grund die Anwendung des Begriffes „Eigengeschwindigkeit“, trotz seiner physikalischen Sinnlosigkeit. Im selben Sinne sind auch die Begriffe „Eigenzeitgeschwindigkeit“ und „Überlichtgeschwindigkeit“ praktisch voll gerechtfertigt.

Beim Übergang eines Gebietes der reinen Physik in die angewandte Physik oder Technik werden immer neue Wortprägungen nötig sein, die oft weniger den strengen wissenschaftlichen Definitionen, als den unabwiesbaren Forderungen des praktischen Lebens angepaßt und weiteren Kreisen verständlich sein müssen. Diese letzteren Forderungen haben fraglos das Primat vor denen der Wissenschaft, wenn sich, wie in diesem Fall, keine Übereinstimmung herstellen läßt.

Wenn wir für die Entfernung der Erde vom Andromedanebel keinen besseren Maßstab angeben können als die astronomische Distanz von 750 000 Lichtjahren, und wenn die Besatzung feststellt, daß sie diese Distanz in 25 ihrer eigenen Lebensjahre zurücklegt, dann erlaubt unsere gegenwärtige Sprache keine andere Ausdrucksweise, als daß der Besatzung ihrer Reisegeschwindigkeit wie 30 000fache Lichtgeschwindigkeit erscheint.

Diese frappanten Feststellungen stehen übrigens in bester Übereinstimmung mit praktischen physikalischen Experimenten: Die Besatzung befindet sich in ähnlicher Situation wie die an der oberen Stratosphäregrenze durch den Aufprall der Primärpartikel kosmischer Strahlung entstehenden Mesonen, deren bekannte sehr kurze Eigen-Lebensdauer ebenfalls nur dank der relativistischen Zeitdilatation ausreicht, die gesamte restliche Atmosphäre zu durchlaufen und an der Erdoberfläche von Instrumenten noch registriert zu werden.

Der relative Lebensweg S eines μ -Mesons der Höhenstrahlung von der Eigen-Lebensdauer T_e ist nach den vorstehenden Beziehungen:

$$S = v T = v T_e (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = c T_e \sqrt{\frac{E_{kin}}{m_e c^2} \left(2 + \frac{E_{kin}}{m_e c^2} \right)} \quad (12)$$

und liefert den experimentellen Beweis für die relativistische Zeitdilatation. Die bekannte Eigen-Lebensdauer der μ -Mesonen von etwa $T_e = 10^{-6}$ sec erlaubt bei lichtnaher Geschwindigkeit nur einen klassischen Lebensweg von etwa $S = c T_e = 3,10^8 \cdot 10^{-6} = 300$ m. Wegen der hohen kinetischen Energien von etwa $E_{kin}/m_e c^2 = 10^2$ wird nach obiger Beziehung der relativistische Lebensweg etwa 10^2 mal länger und reicht von der oberen Stratosphäregrenze bis zur Erdoberfläche; die Eigenzeitgeschwindigkeit der Mesonen erreicht dabei 10^2 fache Lichtgeschwindigkeit.

So wie die kurze Eigen-Lebensdauer von 10^{-6} sec des an der oberen Stratosphäregrenze entstehenden Mesons der kosmischen Strahlung bei seiner licht-

nahen Relativgeschwindigkeit ausreicht, die gesamte Atmosphärendicke von vielleicht 30 km mit hundertfacher Lichtgeschwindigkeit als Eigengeschwindigkeit zu durchfliegen, so reicht die kurze Eigen-Lebensdauer von weniger als einem Jahrhundert eines Menschen aus, um das ganze Weltall von drei Milliarden Lichtjahren Umfang mit einer Eigengeschwindigkeit von mehrhundertmillionenfacher Lichtgeschwindigkeit zu umfliegen.

Weiter zeigt Abb. 2 in einer — der oben beschriebenen parallel verlaufenden — Kurve die während jedes Fluges in Bahnmitte auftretende höchste EIGEN-EINSTEIN-Zahl des Fluges. Bei der Weltall-Umrandung beträgt diese beispielsweise $(v_e/c)_{\max} = 22$, ist also recht ähnlich der entsprechenden Flug-MACH-Zahl bei der Erdumrandung durch einen künstlichen Erdsatelliten.

Nach Abb. 1 entspricht dies einer Längendilatation von etwa $ds/ds' = 3 \cdot 10^9$, das heißt das Weltall hätte in diesem Augenblick für die Besatzung einen Umfang von nur etwa einem Lichtjahr. Wenn sie ihre Geschwindigkeit nicht wieder abbremste, dann würde das Fahrzeug fast in jedem weiteren seiner Eigenjahre das Weltall einmal umrunden — solange alle Weichen richtig gestellt sind.

Aus der dritten Kurve m_{e0}/m_e der Abb. 2 sehen wir, daß bei vollständiger Massenzerstrahlung der Treibstoffverbrauch erst bei Fahrten wesentlich außerhalb unseres Sonnensystems so merkbar wird, daß er auf der Zeichnung überhaupt in Erscheinung tritt. Für eine Reise der beschriebenen, keineswegs wirtschaftlichsten Art zu unserem nächstbenachbarten Sonnensystem, Proxima Centauri, würde die Treibstoffmasse etwa das 40fache der Fahrzeugmasse am Ende der Fahrt sein müssen, wobei die Fahrt rund 3,6 Eigenjahre oder 6 irdische Jahre dauert, bei einer astronomischen Entfernung von 4,3 Lichtjahren.

Bei weiterreichenden Expeditionen wachsen die erforderlichen Massenverhältnisse sehr viel rascher an als die erforderlichen Eigenreisezeiten, doch bleiben sie im gesamten galaktischen Bereich noch in technisch vorstellbarer Größenordnung, besonders wenn man noch zu niedrigeren Beschleunigungen übergeht oder einen größeren mittleren Teil der Flugbahn antriebslos zurücklegt.

Zusammenfassend müssen wir feststellen: Es ist keineswegs so, daß die Fixsterne nur in viele Generationen langen Reisen erreicht werden können, während deren zahlreiche Geschlechter geboren werden, erwachsen und wieder sterben müssen, bis schließlich die fernen Urenkel vielleicht an das Ziel der Aufbrechenden gelangen. Es ist auch nicht so, daß die Hunderttausende von Lichtjahren von uns entfernten fremden Galaxien uns wegen unserer beschränkten Lebensdauer grundsätzlich unerreichbar sind und die Natur uns auf unseren kleinen Winkel des Weltalls beschränkt hätte.

Nein, wir brauchen nicht zu resignieren und die Hände ergeben in den Schoß zu legen. Das unendliche Weltall ist klein genug, daß es der Tatkraft jedes einzelnen von uns persönlich offensteht bis zu seinen alleräußersten Grenzen: Dem Menschen ist alles erreichbar.

Wir werden an ein Lieblingswort EINSTEINS erinnert: „Raffiniert ist unser Herre Gott — doch böse ist er nicht.“

Literaturverzeichnis

1. E. SÄNGER, Zur Mechanik der Photonenstrahlantriebe. Mitteilungen aus dem Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, Stuttgart, Nr. 5. München: R. Oldenbourg, 1956.

Über eine Möglichkeit zur Erhöhung der Ausströmgeschwindigkeit bei Raketentriebwerken¹.

Von

W. Peschka², ÖGfW

(Mit 9 Abbildungen)

(Eingegangen am 6. Juli 1956)

Zusammenfassung. Es werden die Aussichten besprochen, die ein der Filmkühlung ähnliches Verfahren bietet, extrem hohe Gastemperaturen in Brennkammern zu beherrschen. Im Anschluß daran wird die Expansion von Wasserstoff unter Annahme von Dissoziationsgleichgewicht diskutiert. Neben einigen bemerkenswerten Ergebnissen wird ein Näherungsverfahren gewonnen, das die Strömung einer beliebigen kompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit zu berechnen gestattet, wenn die MACH-Zahl der Strömung an mindestens zwei Punkten gegeben ist. Dieses Verfahren läßt sich besonders im Fall einer mehrdimensionalen Strömung anwenden.

Abstract. This paper deals with the prospects which are offered by a method (similar to the film-cooling method) for ruling extremely high gas temperatures in combustion chambers. Then the expansion of hydrogen is discussed, assuming an equilibrium attained by dissociation. Besides some remarkable results an approximation method is developed which allows the calculation of the current of any compressible fluidity without friction, provided that the MACH number of the current is given at two points at least. The described procedure is applicable especially for a multidimensional current.

Résumé. L'éventualité de très hautes températures de combustion que permettrait un procédé analogue au refroidissement pelliculaire des parois est mise en discussion. Un problème connexe: la détente de la vapeur d'eau est analysé en tenant compte de l'équilibre de dissociation. A coté de certains résultats notoires le calcul de l'écoulement d'un fluide compressible et dépourvu de viscosité fait apparaître un procédé d'approximation valable quand le nombre de MACH de l'écoulement est connu en deux points au moins. Ce procédé est en particulier applicable aux écoulements multidimensionnels.

Die Ausströmgeschwindigkeit bei verlustloser Strömung ist bekanntlich proportional der Quadratwurzel des auf die Masseneinheit des Gases bezogenen Enthalpiegefälles während der Expansion. Um möglichst hohe Ausströmgeschwindigkeiten zu erhalten, muß man Treibstoffe verwenden, die Verbrennungsgase mit möglichst niedrigem Molekulargewicht liefern. Dies rührt daher, daß die molaren Reaktionsenthalpien der für Raketen Zwecke in Frage kommenden Treibstoffe meist untereinander von gleicher Größenordnung sind und daher die Verbrennungsgase mit kleinem Molekulargewicht besser ab-

¹ Vorgetragen beim VII. Internationalen Astronautischen Kongreß in Rom, September 1956.

² II. Institut für Allgemeine Mechanik der Technischen Hochschule, Wien, IV., Karlsplatz 13, Österreich.

schneiden als solche mit hohem Molekulargewicht. Aus diesem Grunde wäre bekanntlich atomarer Wasserstoff ein sehr günstiger Treibstoff, wenn nicht andere Nachteile im Wege stünden. Man ist gezwungen, Treibstoffe zu verwenden, deren Verbrennungsgase ein weit größeres Molekulargewicht haben als Wasserstoff. Um die Ausströmgeschwindigkeit zu steigern, bleibt daher nur eine Möglichkeit, das Enthalpiegefälle erhöhen.

Das Enthalpiegefälle kann nur erhöht werden, indem der Brennkammerdruck, die Brennkammertemperatur oder beides erhöht werden. Die Erhöhung des Brennkammerdruckes findet bald eine obere Grenze in der begrenzten Festigkeit des Materials der Brennkammer und der Düse. Einer Erhöhung der Brennkammertemperatur ist ebenfalls durch das Material eine Grenze gesetzt, aber hier scheinen sich Möglichkeiten anzubahnen, einstens doch noch viel höhere Temperaturen beherrschen zu können, als es heute möglich ist.

Es sei eine Düse mit Brennkammer gegeben. Die Temperatur in der Brennkammer sei so hoch, daß das Material der Kammerwand ihr auf die Dauer nicht standhalten kann. Um dennoch einen Betrieb aufrechterhalten zu können, muß also die Brennkammerwand entsprechend gekühlt werden, oder es muß der Wärmeübergang vom Gas auf die Wand anderswie verringert werden.

Eine Möglichkeit hierzu ist das bekannte Filmkühlungsverfahren, das darin besteht, an der Brennkammerwand ständig einen Flüssigkeitsfilm aufrechtzuerhalten. Der Wärmeübergang zwischen Gas und Flüssigkeit ist ja bekanntlich geringer als zwischen Gas und Festkörper. Außerdem wird durch die entstehende Dampfschicht, die ständig über dem Flüssigkeitsfilm liegt, der Wärmeübergang weiter herabgesetzt.

Dieses Verfahren ist erweiterungsfähig. Man könnte von der Wand her ein flüssiges Medium einbringen. Dieses würde sofort wie bei der Filmkühlung verdampfen. Nun soll aber die in der Zeiteinheit je Flächeneinheit eingebrachte Kühlmittelmenge so groß sein, daß der entstandene und sich mit der Hauptströmung mischende Dampf innerhalb eines Bereichs d von der Wand weg — der Vermischungszone — die Enthalpiedichte der Strömung wesentlich herabsetzen kann (Abb. 1). Um eine Zone niedrigerer Enthalpiedichte als die der Hauptströmung entlang der Düsenwand überhaupt aufrechterhalten zu können, muß natürlich entlang der ganzen Strömung Kühlmittel eingebracht werden.

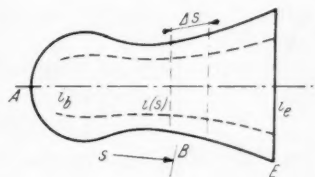


Abb. 1

Für dieses Problem zuständig sind die Gleichungen der ebenen kompressiblen Grenzschicht sowie die Energiegleichung. Es genügt eine Lösung der Grenzschichtgleichungen für den ebenen Fall, da mit Hilfe der bekannten „Mangler-Transformation“ die Lösung für den rotationssymmetrischen Fall erhalten werden kann. Erschwerend ist, daß die Strömung in der Vermischungszone sicher nicht laminar sein wird — und daher ein Austauschglied eingeführt werden müßte —, daß ferner wegen des starken Temperaturunterschiedes nicht mit konstanter Zähigkeit gerechnet werden darf. Außerdem gilt für den entstehenden Dampf nicht die Zustandsgleichung des idealen Gases, da die spezifische Wärme C_p nicht mehr konstant und die Enthalpie keine reine Temperaturfunktion mehr ist (thermische Dissoziation).

Es scheint nach dem heutigen Stand der Forschung daher ziemlich aussichtslos zu sein, Lösungen der Grenzschichtgleichungen für dieses Problem zu finden, es sei denn auf numerischem Wege.

Um die Verhältnisse aber wenigstens angenähert überblicken zu können, kann man eine Abschätzung durchführen, wenn folgende Annahmen zutreffen:

1. Das Gas in der Vermischungszone soll im thermodynamischen Gleichgewicht sein.

2. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Vermischungszone soll wenigstens angenähert bekannt sein.

3. Die Strömung in der Vermischungszone soll stationär sein.

4. Es sollen nur Mittelwerte über die Dicke der Vermischungszone abgeschätzt werden.

5. Annahme 4 bedingt die Annahme einer völligen Durchmischung innerhalb der Vermischungszone.

6. Annahme einer bis auf die Vermischungszone eindimensionalen Strömung.

7. Vernachlässigung der Strahlung.

Die Enthalpieverteilung der ungekühlten Strömung sei $i(s)$. Das eingebrachte Kühlmittel benötige zu seiner Erwärmung die Enthalpie $(\Delta i)_1$ je Masseneinheit. Dadurch sinkt in der Vermischungszone die mittlere Enthalpie auf den Wert $i_m(s) < i(s)$.

Die Enthalpiebilanz des in Abb. 2 eingezeichneten Volumenelementes lautet nun folgendermaßen:

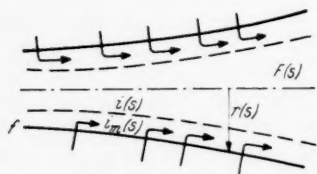


Abb. 2

$$\frac{\Delta s}{l} \cdot \varphi \cdot M \cdot w \cdot i = \frac{\Delta s}{l} \cdot \varphi \cdot M \cdot i_m + \frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right) \cdot M \cdot \delta \cdot (i_m - i_0), \quad (1)$$

wobei $\varphi = f/F$ das Verhältnis der Fläche der ringförmigen Vermischungszone zum Düsenquerschnitt F an der betreffenden Stelle bedeutet. M ist der Massendurchsatz, l die gesamte Bogenlänge der Düsenkontur \widehat{AE} (Abb. 1). δ ist das Verhältnis der gesamten in der Zeiteinheit eingebrachten Kühlmittelmasse zum Massendurchsatz M .

An einem Bogenelement von der Länge Δs wird dann in der Zeiteinheit die Masse $\delta \cdot M \cdot \frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right)$ eingebracht, wobei durch $f\left(\frac{s}{l}\right)$ noch ausgedrückt wird, daß die je Zeit und Flächeneinheit eingebrachte Kühlmittelmasse noch von s abhängen kann.

Es muß also zwischen den erwähnten Größen die Beziehung gelten:

$$\delta \cdot M = \int_0^l \frac{1}{l} \cdot \delta \cdot M \cdot f\left(\frac{s}{l}\right) \cdot ds \quad \text{oder} \quad \frac{2\pi}{l} \int_0^l f\left(\frac{s}{l}\right) ds = 1.$$

w bedeutet die Strömungsgeschwindigkeit, i_0 die Enthalpie des Kühlmittels vor dem Einbringen in die Düse.

Aus Gl. (1) erhält man folgende Beziehung für δ :

$$\delta = \frac{\varphi}{f\left(\frac{s}{l}\right)} \cdot \frac{i - i_m}{i_m - i_0}; \quad (2)$$

wenn $i_m \gg i_0$, was im allgemeinen erfüllt ist, dann gilt:

$$\delta = \frac{\varphi}{f\left(\frac{s}{l}\right)} \cdot \left(\frac{i}{i_m} - 1\right).$$

Die je Längeneinheit einzubringende Kühlmittelmasse beträgt

$$\left[M \cdot \delta \cdot \frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right) \right] \frac{1}{\Delta s} = M \cdot \delta \cdot \gamma_r = \mu, \quad (3)$$

wobei für $\frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right) = \gamma$ und für $\frac{\gamma}{\Delta s} = \gamma_r$ gesetzt wurde. Mit Gln. (3) und (2) ergibt sich dann:

$$\mu = M \cdot \gamma_r \cdot \delta = \frac{M}{l} \cdot \varphi \cdot \left(\frac{i}{i_m} - 1 \right) \quad (4)$$

$$\varphi = \frac{d}{r} \quad \begin{array}{l} r \text{ jeweiliger Düsenradius.} \\ d \text{ jeweilige Dicke der Vermischungszone.} \end{array}$$

Aus Gl. (4) sieht man, daß die pro Zeit- und Längeneinheit zuzuführende Kühlmittelmasse μ auch von der Dicke der Vermischungszone abhängt. Je kleiner die Dicke der Vermischungszone bei sonst gleichen Abmessungen ist, desto weniger Kühlmittelmasse ist nötig. Es ist also zur Berechnung der nötigen Kühlmittelmasse die Kenntnis der Dicke d der Vermischungszone nötig. Diese Dicke d kann unter folgenden Annahmen wenigstens näherungsweise angegeben werden:

Die Dicke der Vermischungszone soll die der Grenzschicht wesentlich über-treffen. Die Vermischungszone kann aber trotzdem Grenzschichtcharakter haben, wenn d nur klein gegenüber dem Düsenradius r ist, so daß also die Grenzschichtgleichungen für dieses Problem noch zuständig wären.

Wird kein Kühlmittel eingebracht, so ist das Geschwindigkeitsprofil praktisch ein Rechteck, wenn obige Annahme zutrifft. Durch Einbringen des Kühlmittels wird dieses Profil verändert. Als Näherung kann ein lineares Profil genommen werden, was nach HANTZSCHE und WENDT bei hohen MACH-Zahlen zumindest in der laminaren Grenzschicht zutrifft¹.

Es wird nun angenommen, daß dieses Geschwindigkeitsprofil auch noch in der Vermischungszone angenähert vorhanden ist.

Also

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{y}{d} \quad 0 \leq y \leq d. \quad (5)$$

Vor Einbringen des Kühlmittels ist der Transport an kinetischer Energie = $1/2 \rho_\infty \cdot U_\infty^3 \cdot d$, nachher

$$\frac{1}{2} \int_0^d \rho u^3 \cdot dy = \frac{1}{2} \rho_m \cdot U_\infty^3 \cdot \frac{d}{4}.$$

Die Differenz diene im wesentlichen zum Aufheizen des Kühlmittels. Es gilt dann, wenn W die in der Zeiteinheit vom Kühlmittel aufgenommene Energie ist:

$$\frac{1}{2} \rho_\infty \cdot U_\infty^3 \cdot d - W = \frac{1}{2} \rho_m \cdot \frac{1}{4} U_\infty^3 \cdot d; \quad (6)$$

daraus erhält man

$$d = \frac{2W}{\rho_\infty \cdot U_\infty^3 \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_m}{\rho_\infty} \right)}. \quad (7)$$

¹ Vgl. W. HANTZSCHE und H. WENDT, Zum Kompressibilitätseinfluß bei der laminaren Grenzschicht der ebenen Platte. Jahrbuch der Luftfahrtforschung I, 517 (1940); II, 40 (1942). — H. SCHLICHTING, Grenzschichttheorie, Kap. XV (1951); dort auch weitere Literatur.

Für W kann gesetzt werden

$$W = \frac{\mu}{2\pi r} \cdot (\Delta i)_1 \cdot U_\infty \cdot [t] \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{2\pi r}$$

Daraus ergibt sich

$$d = \frac{\bar{\mu} \cdot (\Delta i)_1 \cdot [t]}{\rho_\infty \cdot U_\infty^2 \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_m}{\rho_\infty}\right)} \quad (8)$$

Diese Vermischungsdicke bleibt aber nicht konstant, da durch das Einbringen von Masse eine Verbreiterung eintreten muß. Diese Abhängigkeit kann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung angegeben werden. Es ergibt sich näherungsweise eine lineare Abhängigkeit der Dicke d von der Bogenlänge s .

$$d = \frac{2\bar{\mu}}{\rho_m U_\infty} s + d_0 \quad (9)$$

Bei der Abschätzung der Dicke d wurde der Einfluß der Dissipation vernachlässigt. Dies kann aber berücksichtigt werden. Die durch Reibung in Wärme verwandelte Energie ist von der Größenordnung $\nu \cdot \rho_m \cdot \left(\frac{U_\infty}{d}\right)^2$. Das würde wiederum eine Erhöhung der einzubringenden Kühlmasse bringen.

Dieser Term bestimmt auch die obere Grenze der Ausströmgeschwindigkeit, die auf diese Weise noch beherrscht werden kann, da die Dissipation proportional dem Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten U_∞/d in der Vermischungszone ist. Kleine Dissipation würde einen kleinen Gradienten verlangen, oder aber müßte bei gleicher Dicke d U_∞ klein sein. Wächst aber U_∞ , so wächst die Dissipation, wodurch jedoch dann ein oberer Wert für U_∞ festliegt.

Das Maximum für U_∞ würde sich ergeben, wenn die Dissipation von derselben Größenordnung ist wie die „Schluckfähigkeit“ $(\Delta i)_1$ des Kühlmittels. Mit Gl. (8) und dem Ausdruck für die Dissipation erhält man:

$$U_{\infty_{max}}^6 = \left[\left(\frac{\bar{\mu} \cdot [t]}{\rho_\infty \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_m}{\rho_\infty}\right)} \right)^2 \cdot \left(\frac{(\Delta i)_1}{\nu^{1/3}} \right)^3 \right] \quad (10)$$

oder angenähert

$$U_{\infty_{max}} = \left(\frac{\bar{\mu} \cdot [t]}{\rho_\infty} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{(\Delta i)_1}{\nu^{1/3}} \right)^{1/2} \quad (11)$$

Gase mit kleiner Dichte und kleiner kinematischer Zähigkeit ν gestatten also höhere Geschwindigkeiten der Hauptströmung als solche mit großen Werten von Dichte und Zähigkeit. Wasserstoff wäre aus diesem Grunde sehr günstig.

Das Einbringen von Kühlmasse ändert ferner die Ausströmgeschwindigkeit und den Schub. Diese Änderungen sollen nun berechnet werden.

Für ein Volumelement in der Düse gilt folgendes:

$$\Delta J = \Delta E_K + \Delta Q_1, \quad \Delta Q_1 = M \cdot \delta \cdot \frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right) \cdot (\Delta i)_1$$

$$\Delta E_K = \frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right) \cdot M \cdot (1 + \delta) \cdot \frac{w^2}{2} = \Delta J - \Delta Q_1$$

Daraus ergibt sich:

$$\Delta \frac{w^2}{2} = \frac{1 - \delta \cdot \frac{(\Delta i)_1}{\Delta i} \cdot \frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right)}{\frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right) \cdot (1 + \delta)} \cdot \Delta i$$

oder

$$\Delta w = \Delta w_i \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta \cdot \frac{(\Delta i)_1}{\Delta i} \cdot \frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right)}{\frac{\Delta s}{l} \cdot f\left(\frac{s}{l}\right) \cdot (1 + \delta)}}; \quad (12)$$

w_i Geschwindigkeit der ungekühlten Strömung, S_i Schub der ungekühlten Strömung.

Für die gesamte Düse

gilt: $f\left(\frac{s}{l}\right) = 1$, $\Delta s = l$

und für den Schub: $S = S_i \cdot \sqrt{(1 + \delta) \left(1 - \delta \frac{(\Delta i)_1}{\Delta i}\right)}$

$$w = w_i \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta \cdot \frac{(\Delta i)_1}{\Delta i}}{1 + \delta}} \quad (13)$$

Die Verhältnisse von Gl. (13) sind in Abb. 3 aufgetragen. Man sieht, daß die Ausströmgeschwindigkeit anfangs nur langsam nachläßt, während der Schub sogar ansteigt, wenn δ wächst. Das wäre beim Start nur erwünscht.

Um die Leistungsfähigkeit des diskutierten Verfahrens zu zeigen, mögen die Verhältnisse an einem Beispiel demonstriert werden.

Es soll die Expansion von Wasserstoff¹ in einer Düse behandelt werden. Molekularer Wasserstoff möge in die „Brennkammer“ eingebracht und dort irgendwie auf eine Temperatur von etwa 5900° K bei einem Druck von 100 At gebracht werden. Die Expansion in der Düse erfolge isentrop auf den Außendruck von 1 At. Es wurde angenommen, daß sich der Wasserstoff während der Expansion im Dissoziationsgleichgewicht befindet. Diese Näherung ist streng genommen nicht zulässig, da die Expansionszeit zur Erreichung des Gleichgewichtszustandes nicht ausreicht, so daß in Wirklichkeit Abweichungen auftreten werden. Es möge aber trotzdem dieser Fall diskutiert werden, weil sich einige interessante Folgerungen ergeben.

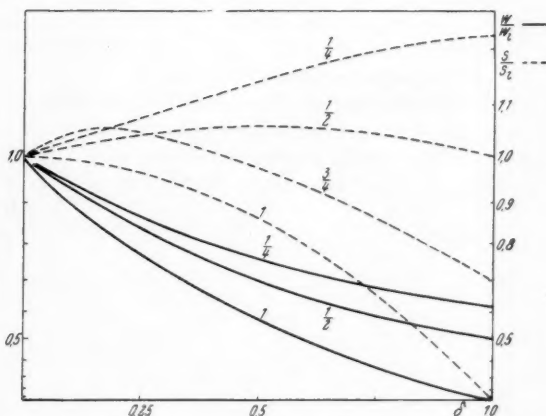


Abb. 3. Schub S und Ausströmgeschwindigkeit w einer gekühlten Strömung als Funktion des Kühlmassenverhältnisses (s. Text) im Verhältnis zu Schub und Ausströmgeschwindigkeit der ungekühlten Strömung. Das Verhältnis: Aufnehmbare Energie von Seiten des Kühlmittels zu Enthalpie der Strömung als Parameter

¹ Vgl. J. SÄNGER-BREDT; Zur Thermodynamik von Arbeitsgasen für Atomraketen, in: Probleme der Weltraumforschung. Biel: Laubscher & Cie., 1955.

Die Expansion läßt sich nicht mehr in derselben Weise wie beim idealen Gas berechnen, da infolge der Dissoziation die spezifische Wärme des Wasserstoffs enorm stark veränderlich ist (Abb. 4). Ferner ist wegen der Dissoziation die Enthalpie keine reine Temperaturfunktion. Als Zustandsgleichung fungiert bei Gültigkeit des DALTONSchen Gesetzes die des idealen Gases, doch tritt an Stelle des Molekulargewichtes das sogenannte mittlere Molekulargewicht, das von Druck und Temperatur abhängig ist.

Derartige Probleme sind am besten mit Hilfe des Entropie-Enthalpie-Diagramms der betreffenden Substanz zu lösen. Die erste Aufgabe besteht also in der Aufstellung des $i-s$ -Diagramms (Abb. 7). Aus dem $i-s$ -Diagramm läßt sich in einfacher Weise die Gleichgewichtsschallgeschwindigkeit ermitteln, die ebenfalls druckabhängig ist.

Damit kann man die Zustände im engsten Querschnitt der Düse — die kritischen Zustände — festlegen (Abb. 8 zeigt dies schematisch). Bekanntlich wird bei jeder kompressiblen Strömung, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, im engsten Querschnitt der Düse die MACH-Zahl 1, also die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit und die Stromdichte ist dort ein Maximum¹.

Ferner ist auch die MACH-Zahl als Funktion der Enthalpie längs der Isentropen bekannt, weil die Schallgeschwindigkeit als Funktion der Enthalpie aus dem $i-s$ -Diagramm entnommen werden kann. Nun ist noch festzulegen, an welcher Stelle der Düse die entsprechende MACH-Zahl erreicht wird. Dies gelingt mit Hilfe von Kontinuitätsgleichung und erstem Wärmehauptsatz.

$$M = F \cdot \rho \cdot w$$

$$dq = di - \frac{dp}{\rho}$$

$$dq = 0, \quad di = \frac{dp}{\rho}$$

Daraus erhält man

$$1/\rho = (\partial i / \partial p)_s \quad (14)$$

In die Kontinuitätsgleichung eingesetzt ergibt sich dann:

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_s = \frac{F}{M} \cdot w \quad (15)$$

und

$$w = \frac{M}{F} \cdot \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_s \quad (16)$$

$(\partial i / \partial p)_s$ wird aus dem $i-s$ -Diagramm entnommen.

Damit ist die eindimensionale Düsenströmung vollständig bekannt. Dieses Verfahren ist auf jede kompressible strömende Flüssigkeit anwendbar, wenn das betreffende $i-s$ -Diagramm gegeben ist.

Wenn man nun die Ergebnisse genau betrachtet, so kommt man zu einem interessanten Ergebnis:

In Abb. 9 ist die MACH-Zahl des Wasserstoffs über der Enthalpie mit der Entropie als Parameter aufgetragen.

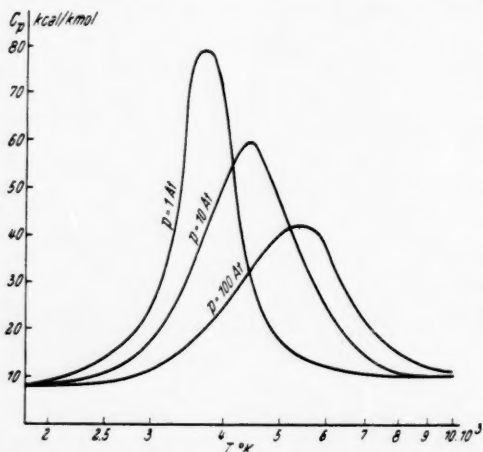


Abb. 4. Spezifische Wärme C_p des Wasserstoffs H_2 für die drei Isobaren 1 At, 10 At, 100 At, mit Berücksichtigung der thermischen Dissoziation

¹ Siehe K. OSWATITSCH, Gasdynamik, S. 46. Wien: Springer, 1952.

Die MACH-Zahl eines idealen Gases läßt sich durch die Enthalpie und den Adiabatenexponenten κ bekanntlich folgendermaßen ausdrücken:

$$M^2 = \frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{i_0}{i} - 1 \right).$$

Nun kann man versuchen, ein hypothetisches Vergleichsgas zu bestimmen, dessen $M(i_0/i; \kappa)$ -Kurve den Punkt $M = 1$ und irgendeinen anderen Punkt bekannter MACH-Zahl gemeinsam hat (s. Abb. 5 und 9). Dann zeigt sich, daß die $M(i_0/i, \kappa)$ -Kurve dieses Vergleichsgases in diesem Falle nur um maximal 8% von der wirklichen abweicht.

Diese Tatsache kann zu folgendem Iterationsverfahren benutzt werden:

Es seien zwei Punkte (M, i) , bekannt. Durch diese beiden Punkte wird die Kurve des Vergleichsgases gelegt. Seine MACH-Zahl nun wird als die der wirklichen Strömung betrachtet, und mit Hilfe des Diagramms von Schallgeschwindigkeit - Enthalpie kann dann sofort die Strömungsgeschwindigkeit ermittelt werden. Sind mehrere Punktepaare bekannt, dann ist die Näherung noch verbesserbar.

Dieses Verfahren kann auch für die zweidimensionale und rotationssymmetrische Strömung verallgemeinert werden. Hierzu ist es erst recht geeignet, da die Ermittlung der Vergleichsströmung verlangt, die Strömung eines idealen Gases zu berechnen, was mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens möglich ist.

Die MACH-Zahlen der Vergleichsströmung sind dann wieder eine gute Näherung für die MACH-Zahlen der wirklichen Strömung, und damit können dann leicht die Strömungsgeschwindigkeit und die anderen Zustandsgrößen angegeben werden.

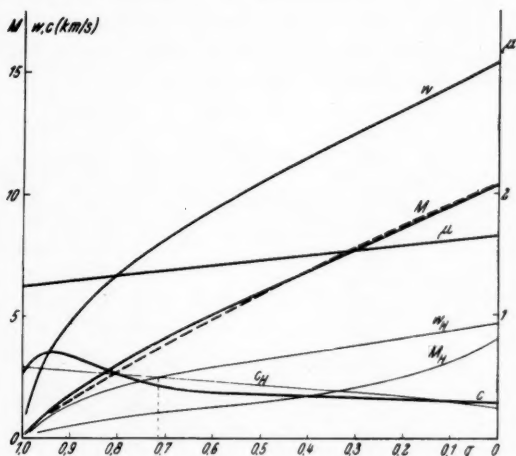


Abb. 5. Charakteristische Werte des expandierenden Wasserstoffs. Isentrope Expansion längs der Isentropen

$$s = 10 \text{ (s. Text und Abb. 7)}, q = \frac{i - i_e}{i_b - i_e}$$

i_b Enthalpie in der Brennkammer, i_e Endenthalpie, i jeweilige Enthalpie. μ bedeutet hier ausnahmsweise das mittlere Molekulargewicht

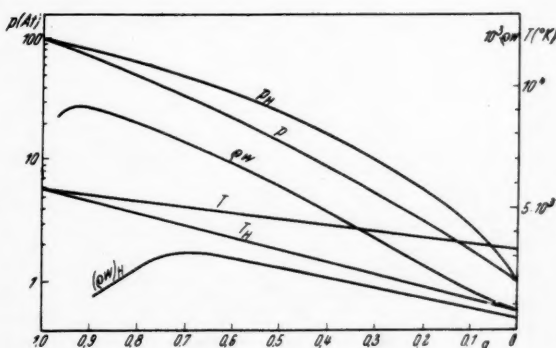


Abb. 6. Charakteristische Werte des expandierenden Wasserstoffs (s. Text und Abb. 7). Die Bedeutung von q siehe ebenfalls bei Abb. 5

In Abb. 5 und 6 sind die Verhältnisse bei der Expansion des Wasserstoffs gegeben. Eine Diskussion ergibt folgendes:

Der kritische Zustand rückt infolge der Dissoziation näher an die Anfangswerte heran. Die maximale Stromdichte ist wesentlich größer als bei der Strömung ohne Dissoziation. Das heißt, daß man bei Rekombination des Gases einen wesentlich größeren Massendurchsatz erhält als beim idealen Gas.

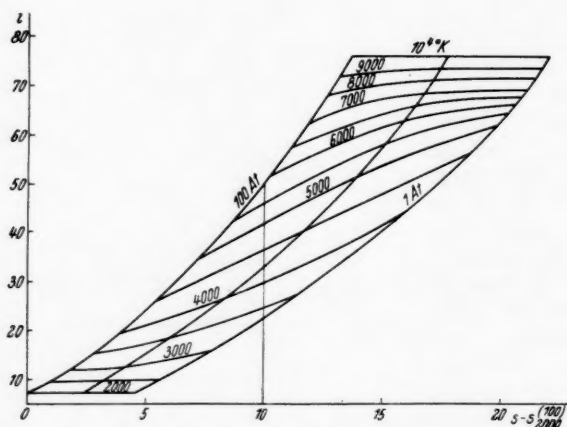


Abb. 7. $i-s$ -Diagramm von Wasserstoff für Dissoziationsgleichgewicht $H_2 + 102,6 \text{ Kcal} \rightleftharpoons 2 H$

Die Ausströmgeschwindigkeit ist im Fall der Rekombination viel höher als ohne Rekombination, da im Falle des Dissoziationsgleichgewichtes die Rekombinationswärme von 103,6 Kcal/Mol der Strömung zur Verfügung steht. In Wirklichkeit wird eine vollkommene Rekombination allerdings nicht eintreten, wie schon erwähnt wurde.

Allerdings dürfte bei zweiatomigen Molekülen, wie es ja beim Wasserstoff zutrifft, trotzdem ein ziemlich hoher Rekombinationsgrad auftreten.

Während ferner bei der Expansion des idealen Gases die Schallgeschwindigkeit monoton abnimmt, kann bei dissoziierenden Gasen die Schallgeschwindigkeit zuerst ansteigen und dann erst abnehmen. Dies kann dadurch eintreten, daß durch die Expansion die Dissoziation begünstigt wird, wodurch das mittlere

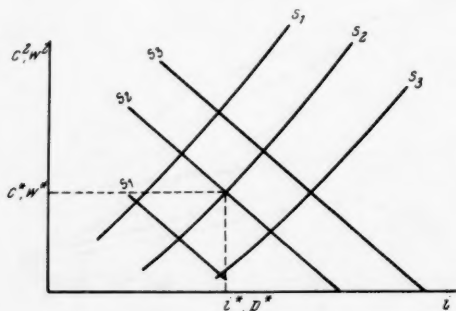


Abb. 8. Schematische Darstellung der Auffindung der kritischen Zustände (s. Text)

Molekulargewicht des Gases kleiner wird. Übertrifft die Zunahme der Schallgeschwindigkeit durch die Abnahme des Molekulargewichtes die Abnahme der Schallgeschwindigkeit infolge der Temperaturabnahme, so nimmt die Schallgeschwindigkeit anfangs zu. Es möge noch betont werden, daß es sich hier um die Gleichgewichtsschallgeschwindigkeit handelt.

Ferner wurde noch die Expansion des atomaren Wasserstoffes von demselben Anfangsdruck von 100 At und derselben Anfangstemperatur von 5900° K auf

den Druck von 1 At zum Vergleich angetragen, wobei angenommen wurde, daß der atomare Wasserstoff ein ideales Gas ist, und keine Rekombination zu H_2 eintritt.

Nun möge längs der Düsenwand die Enthalpie durch Einbringen von Kühlmasse auf $1/4 i - i$ -Enthalpie der freien Strömung — gehalten werden.

Aus Gl. (2) ergibt sich für

$$\delta \doteq \frac{\varphi}{f\left(\frac{s}{l}\right)} (4 - 1) = 3\varphi, \quad f\left(\frac{s}{l}\right) = \text{const.} = 1$$

gesetzt.

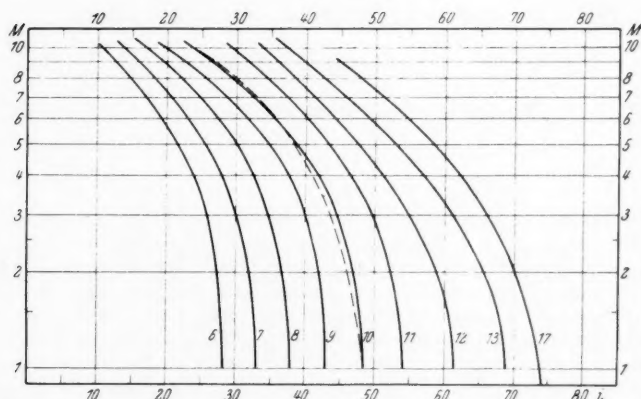


Abb. 9. MACH-Zahl des expandierenden Wasserstoffs für Dissoziationsgleichgewicht. Als Parameter die Entropie. Für die Isentrope $s = 10$ ist strichliert der Verlauf der MACH-Zahl eines idealen Vergleichsgases angedeutet (s. Text)

Eine Abschätzung mit Wasser als Kühlstoff zeigt nun, daß dafür φ -Werte von 0,05 bis 0,2 in Frage kommen. Damit würde sich mit $\varphi = 0,1$ ein δ von ungefähr 0,3 ergeben. Es müßte also die Kühlmittelmasse ungefähr ein Drittel der Treibstoffmasse betragen. Die Ausströmgeschwindigkeit beträgt dann etwa 87% der Ausströmgeschwindigkeit ohne Kühlung, der Schub ist um 10% höher (Abb. 3).

Die Ausströmgeschwindigkeit ohne Kühlung würde hier ungefähr 15 300 m/s betragen, mit Kühlung daher 13 300 m/s, wobei natürlich die Ausströmgeschwindigkeit von 15 300 m/s ohne Kühlung gar nicht erreichbar ist, weil die „Brennkammerwand“ der Temperatur von 5900° K nicht gewachsen wäre. Die Wandtemperatur mit Kühlung würde etwa 2600 bis 2800° K betragen.

Wesentlich geht die „Schluckfähigkeit“ des Kühlstoffes $(\Delta i)_1$ in das Ergebnis ein. Je höher sie ist, um so günstiger gestalten sich die Verhältnisse. Hier wäre eine etwaige thermische Dissoziation des Kühlstoffes gar nicht unerwünscht, weil dadurch nur dessen Schluckfähigkeit gesteigert wird (in der Brennkammer).

Abschließend kann also gesagt werden, daß die Beherrschung hoher Temperaturen in der Brennkammer und Düse von Raketenmotoren keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bieten werden.

Die Erzeugung derartiger Temperaturen ist ein viel größeres Problem. Mit chemischen Reaktionen sind solche Temperaturen wegen der Dissoziation nicht zu realisieren.

Es bleibt hier nur die Möglichkeit, mit Hilfe von Kernreaktionen das Gas in der Brennkammer aufzuheizen.

Studies of a Minimum Orbital Unmanned Satellite of the Earth (MOUSE)

Part III. Radiation Equilibrium and Temperature¹

By

D. T. Goldman² and S. F. Singer³, ARS

(With 14 Figures)

Abstract. This paper deals with the problem of predicting the equilibrium temperature of an artificial earth satellite and of giving methods for designing and controlling its temperature under all types of conditions. The major heat sources are: (i) the sun; (ii) sunlight reflected from the earth, and (iii) long-wave radiation from the earth. Further, we consider the additional production of heat by internal sources, such as nuclear power supplies. For a satellite travelling above the atmosphere the energy it receives is primarily transferred by radiation, infrared and visible. Therefore the equilibrium temperature of the satellite is determined by the properties of the satellite *skin*, i.e. its radiation characteristics (emissivity and albedo) in the visible and in the infrared regions of the spectrum. If we are dealing with a variable input of heat and are interested in the variation from the equilibrium temperature, then the thermal properties of the satellite body itself become of importance; the *heat capacity* of the satellite for example determines how rapidly it can follow the variation in heat input. We generally assume that the *heat conductivity* within the satellite is perfect so that all portions are at the same temperature, or at least that the skin is at an even temperature. Deviations from this ideal situation are considered separately.

After we determine the sources of heat input in detail and after we discuss the small heat input effects (collision with the molecules, radicals, meteors, excited atoms, cosmic rays), we calculate the equilibrium temperature based on the equality of heat input and heat output, that is, a zero net flow of energy. The results for the equilibrium temperature are presented in the form of convenient nomograms to aid in preliminary design.

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit behandelt die Gleichgewichtstemperaturvorhersage eines künstlichen Satelliten und die Angabe von Methoden, seine Temperatur unter allen möglichen Arten von Bedingungen zu planen und zu kontrollieren. Die hauptsächlichen Wärmequellen sind: 1. die Sonne; 2. von der Erde reflektiertes Sonnenlicht; 3. langwellige Strahlung von der Erde. Weiters wird die zusätzliche Wärmeerzeugung durch innere Quellen, wie Kernenergiebatterien, betrachtet. Auf einen Satelliten oberhalb der Atmosphäre wird die Energie, die er erhält, in erster Linie durch die Strahlung (im Infraroten und im Sichtbaren) übertragen. Deshalb

¹ This paper was presented at the Seventh International Astronautical Congress in Rome, September 1956.

² Graduate Research Assistant, University of Maryland, College Park, Md., USA.

³ Associate Professor, Department of Physics, University of Maryland, College Park, Md., USA.

wird die Gleichgewichtstemperatur des Satelliten durch die Eigenschaften seiner *Hülle*, das heißt deren Strahlungscharakteristik (Emissionsvermögen und Albedo) in den sichtbaren und infraroten Teilen des Spektrums, bestimmt.

Wenn wir mit variabler Wärmeenergiezufuhr rechnen und an der Variation von Seite der Gleichgewichtstemperatur interessiert sind, werden die thermischen Eigenschaften des Satellitenkörpers selbst von Bedeutung; die *Wärmekapazität* des Satelliten z. B. bestimmt, wie rasch er der Variation im Wärmeeingang folgen kann. Es wird die allgemeine Annahme gemacht, daß die *Wärmeleitfähigkeit* innerhalb des Satelliten vollkommen ist, so daß alle seine Teile sich auf derselben Temperatur befinden, oder mindestens, daß die Haut eine gleichmäßige Temperatur hat. Abweichungen von dieser idealen Situation werden gesondert betrachtet.

Nachdem die Quellen der Wärmezufuhr in Einzelheiten festgelegt und die kleinen Wärmezufuhrwirkungen diskutiert worden sind (Kollision mit Molekülen, Radikalen, Meteoriten, erregten Atomen, kosmischen Strahlen), wird die Gleichgewichtstemperatur berechnet, die auf der Gleichheit von Wärmeeingang und Wärmeausgang beruht (das ist ein Null-Nettofluß der Energie). Die Ergebnisse für die Gleichgewichtstemperatur werden in Form passender Nomogramme dargestellt, die bei vorläufigen Konstruktionen nützlich sein können.

Résumé. Cet article a trait au problème de la température d'équilibre d'un satellite artificiel et aux méthodes permettant de la fixer et de la contrôler en toutes circonstances.

Les principales sources de chaleur sont: (1) le soleil; (2) la réflexion du rayonnement solaire par la terre et (3) le rayonnement terrestre à grande longueur d'onde.

De plus il faut envisager les sources de chaleur internes telles que celle associée à la production d'énergie nucléaire. L'énergie captée par un satellite orbitant en dehors de l'atmosphère est avant tout transmise par rayonnement, infra-rouge et visible. Aussi l'équilibre de température est-il déterminé par la nature du revêtement, c'est-à-dire par son émissivité et son albedo dans les régions infra-rouge et visible du spectre.

Dans le cas d'un apport de chaleur variable et d'écarts à la température d'équilibre, les propriétés thermiques de la masse même du satellite deviennent importantes; la capacité calorifique du satellite détermine par exemple la rapidité avec laquelle il s'ajuste aux variations de l'apport de chaleur. En règle générale la conductibilité thermique dans le satellite est supposée parfaite, toutes les parties et en tout cas le revêtement étant alors à la même température. Les écarts à cette situation idéale sont envisagés séparément.

Après un examen détaillé des sources principales de chaleur et une discussion des sources faibles (collision avec molécules, radicaux, météorites, atomes excités, rayons cosmiques) l'équilibre de température est calculé sur la base d'une égalité entre entrée et sortie de chaleur, c'est à dire de l'annulation du flux net d'énergie. Les résultats pour la température d'équilibre sont présentés sous forme de nomogrammes commodes pour les calculs d'avant-projets.

List of Symbols

- α_E = Albedo of earth
- E_0 = Solar constant = 1400 watts/m²
- R_E = Radius of the earth
- σ = STEFAN-BOLTZMANN constant = 5.67×10^{-8} watts/m²·°K⁴
- T_p = Equilibrium temperature of the planet earth
- T_{eq} = Equilibrium temperature of the satellite
- ϵ_{IR} = Infrared emissivity
- α_v = Visual albedo of the satellite
- A = Cross-sectional area of the satellite
- μ = Eclipse factor
- h = Altitude of the orbit

- ψ = Angle at which the satellite goes into the earth's shadow (see Fig. 3)
 ζ = Angle between the orbit plane and the sun-earth line (see Fig. 4); min. zenith angle to the sun (see Fig. 9)
 v = Velocity of the satellite relative to the upper atmosphere
 ρ = Atmospheric density
 i_E = Inclination of the earth to ecliptic
 Ω = Position of orbit node (in equatorial plane) (see Fig. 9)
 Φ = Geocentric angle (along orbit) measured from point OS (see Fig. 9)
 i_s = Inclination of satellite's orbit to plane of the equator

I. Introduction

The problem of the temperature of satellites and space vehicles has been previously discussed by several authors [1-6]. EHRICKE [1] has considered the temperature of an idealized space station as a function of distance from the sun and has not taken into account the effect of a nearby planet such as the earth. STERNBERG [2] considered only satellites having black body properties. BUETTNER [3] considered more realistic surface conditions for the satellite skin and worked out several special cases. HANSEN [4] considers also the aerodynamic heating during the ascent of the rocket. He mentions the possibility of insulating the skin of the satellite from the body. SANDORFF and PRIGGE [5] worked out several special cases and consider in detail the heat conductivity and heat capacity of the satellite skin and interior. They discuss the advantage of insulating the skin from the interior to reduce the temperature excursions of the interior¹. Finally GAST [6] considers the equilibrium temperatures of satellites for special orbits but neglects the effects of heat conductivity.

The main purpose of this paper is to establish a procedure for calculating this equilibrium temperature of satellites. Since there are so many parameters involved which vary from satellite to satellite, from orbit to orbit, and from launching to launching, it is important to determine a general method to calculate how the temperature depends on these parameters. The parameters of interest are: Surface properties of the satellite; surface properties of the earth directly below the orbit; characteristics of the orbit, such as altitude, inclination, orientation with respect to the sun-earth line, etc. The shape of the satellite may vary also, and it may be either spinning or fixed in space, varying the results accordingly. For simplicity, we have considered only a spherical satellite assumed to be small enough so that heat conductivity is perfect. We have also investigated the effect of insufficient heat conductivity on the temperature distribution. We purposely have not considered definite construction of skin materials but rather have expressed the results in terms of general albedo and emissivity figures of the skin material. The nomograms are designed to convey the results in a convenient form so that they can be used for preliminary design.

¹ It is a matter of choice which is preferable: *insulation of the skin or good heat conductivity*. The approach adopted by previous authors (Ref. [4] and [5]) in which the skin is insulated from the central part of the satellite, has the following result. The skin itself having a very small heat capacity can fluctuate violently between the day and night side of the earth (see our discussion in part VII of the paper). It is difficult then to calculate the temperature reached by the central portion of the satellite. On the other hand, our philosophy would be to insure good heat conductivity between the skin and the center, giving a high heat capacity. As we shall see, this procedure leads to only very small temperature fluctuations as the satellite passes over the day and night sides of the earth.

II. Sources of Radiative Energy

1. Sun

The ultimate source of the radiational energy intercepted by an orbital satellite is the sun. The spectral distribution of the sun's energy is given in Fig. 1

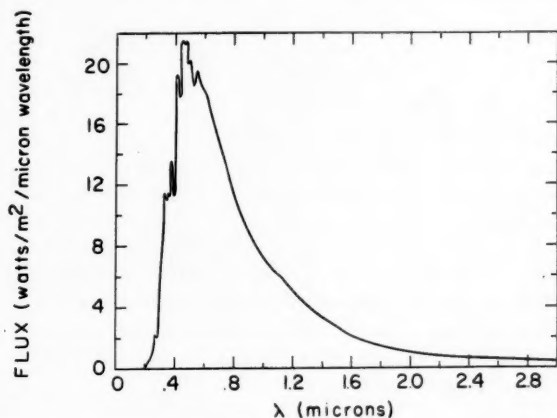


Fig. 1. Solar flux density vs wavelength (from Ref. [16])

where the similarity to the radiation from a black body can be seen. Using WIEN's displacement law [7], $\lambda_{max} T = 2884 \mu\text{-}^\circ\text{K}$; from Fig. 1 it can be seen that λ_{max} for the sun is $.474 \mu$. Thus the sun corresponds to a black body radiating at $6,100^\circ\text{K}$.

2. Earth

The planetary temperature of the earth, on the other hand, is certainly low enough so that this planet is inhabitable. The amount of radiation absorbed by the earth is directly proportional to $1 - \alpha_E$, where α_E , the albedo of the earth, is a measurement of the reflectance of the earth. (Thus, for example, a perfect mirror would have an albedo of 1 and absorb no radiation.)

The albedo of the planet earth is certainly not the same over the entire mass. Indeed such quantities as cloud coverage and kind of surface determine the value of the albedo. A more complete discussion of the determination of the earth's albedo is given in Appendix I. For most of the following we shall use an average albedo of the earth equal to .34.

The earth absorbs direct radiation from the sun and re-radiates it in a complicated manner, partially from the ground and partially from the atmosphere (see IV).

III. Calculation of Planetary Temperatures

The amount of flux absorbed from the sun at a given instant by the earth is $(1 - \alpha_E) E_0 \pi R_E^2$ where E_0 is the solar constant, and πR_E^2 is the cross sectional area of the earth intercepting the sun's rays. The earth, a diffuse emitter, radiates in the mean a flux per unit area of σT_p^4 from the entire surface $4\pi R_E^2$ of the earth; T_p is defined as the planetary temperature; $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ watt/m}^2\text{-}^\circ\text{K}^4$ (the STEFAN-BOLTZMANN constant). Thus, at equilibrium,

$$\pi R_E^2 (1 - \alpha_E) E_0 = 4\pi R_E^2 \sigma T_p^4.$$

Solving, we find $T_p = \left[\frac{(1 - \alpha_E) E_0}{4 \sigma} \right]^{1/4}$ where $E_0 = 1400 \text{ watts/m}^2$. With $\alpha_E = .34$, the average earth's albedo, we find $T_p = 250^\circ \text{K}$. (Hence, from WIEN's displacement law, the maximum wavelength is given by $\lambda_{max} [\text{planet}] = 2884/250 = 11.5 \mu$.) If the average earth's albedo were to change drastically over a period of time, the temperature T_p and hence the climate would change; e.g., with

$$\alpha_E = .50, \quad \text{we find} \quad T_p = 233^\circ \text{K};$$

with

$$\alpha_E = .20, \quad \text{we find} \quad T_p = 262^\circ \text{K}.$$

The earth's surface temperature varies from -40°C in polar latitudes to 40°C in tropical latitudes, with a mean of 14.3°C , much higher than the mean planetary temperature of -23°C . On the other hand, the planetary temperature is much greater than the coldest temperature experienced in the atmosphere below 70 km, where a mean of -60°C at the tropopause is reasonable. Thus, we see that planetary radiation is composed of contributions of energy both from the earth's surface and lower atmosphere at higher than planetary temperatures, together with less energy flux from the upper troposphere at lower than planetary temperatures¹. We see that a mean of ground and troposphere temperatures is $\left(\frac{-60 + 14}{2} = -23^\circ \text{C} \right)$ which is close to the planetary temperature.

IV. Infrared Radiation from the Earth

In determining the quantity of infrared energy radiated by the earth to space, we consider the earth to be composed of two concentric isothermal spheres, one with a temperature of 14°C corresponding to the mean surface temperature, and the other with a temperature of -60° , the temperature at the tropopause. Both spheres radiate energy according to a spectral distribution corresponding to the black body curves associated with each temperature. However, it is known that the earth's atmosphere absorbs the energy radiated at the extremes of the spectrum. Specifically, for $\lambda < 7 \mu$ and $\lambda > 14 \mu$, complete absorption occurs and no radiation from the sphere of higher temperature (and lower altitude) will escape to space. For $8.5 < \lambda < 11 \mu$, the atmosphere is completely transparent. The intermediate regions 7 to 8.5μ and 11 to 14μ are semi-transparent. To evaluate the radiation for such a system we resort to a method suggested by SIMPSON [8], as outlined in the following:

In Fig. 2 two black body curves are drawn, one for $T = 14^\circ \text{C}$ (mean surface temperature) and one for $T = -60^\circ \text{C}$ (tropopause temperature). In the regions $< 7 \mu$ and $> 14 \mu$, radiation from the earth will be absorbed by the water vapor and CO_2 in the atmosphere until the flux that finally escapes to space will be

¹ Properly speaking the infrared energy radiated from the earth is a function of the latitude and the time of day. One would think therefore that an equatorial orbit would receive more energy from the earth than a polar orbit. For intermediate orbits the exact value of infrared energy received will depend on the position of the line of nodes with respect to the sun-earth line as well as on the inclination of the orbit, in other words, on the orientation of the orbital plane in space with respect to the sun. These effects are small, however, compared to those arising from meteorological conditions, principally the water vapor content and its distribution with altitude.

determined by the temperature of this last layer. Thus the flux is just the area under the lowest curve in Fig. 2. For $8.5 < \lambda < 11 \mu$ the atmosphere is indeed transparent and the flux is the area under the uppermost curve. In the intermediate regions, the flux is shown as the area below the heavy line. The total area under the composite curve is the long-wave radiation to space.

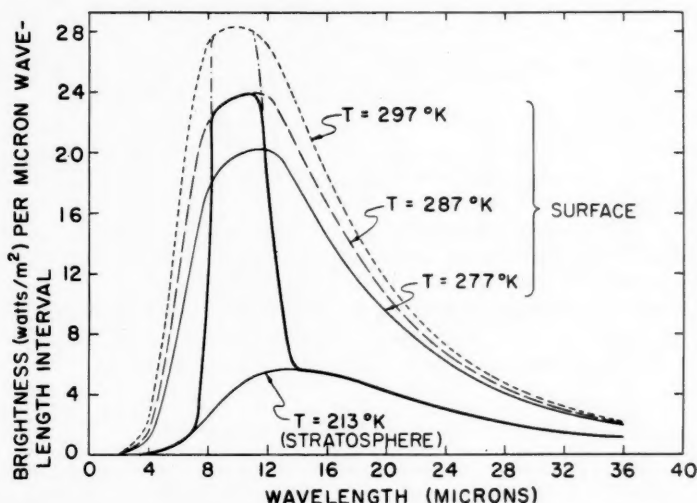


Fig. 2. Black body radiation curves for various mean surface temperatures and a tropopause temperature (fixed at -60°C) illustrating the determination of the long-wave radiation to space

Three typical black-body curves for 3 surface temperatures have been plotted and then geometric measurements (planimetric) were made to find the areas under the composite curves. The energy radiated from the earth for the 3 temperatures was:

Table I

Temperature of earth's surface	Flux (watts/m ²)
4 °C	175.2
14 °C	188.5
24 °C	203.4

V. Energy Sources other than Solar Radiation

As we have seen, solar radiation, both direct and reflected, and heat radiation from the earth, determine the temperature of the satellite. In addition there are very minor effects due to impacts with various particles. Cosmic ray heating is entirely negligible. The total cosmic ray energy averaged over the earth's surface is of the order of 1 Bev per cm² per sec. This corresponds to 10^{13} ev per m² per sec or approximately 10^{-6} watt/m². This estimate assumes also that all of the cosmic ray energy is expended within the satellite, which of course is not the case.

Slightly higher but still negligible is the energy input from meteors and meteoric dust. The flux of incident particles is derived from astronomical observations such as observations of scattering of sunlight by interplanetary dust, from

observations of impacts of dust particles on high altitude rockets, and from measurements of the accretion of such material by the earth through the study of ocean bottom deposits. WHIPPLE [9] has reviewed the evidence and gives an accretion of 1000 tons of meteoric material per day over the whole earth. Even if we assume that the incoming material has a velocity of 50 km/sec, the total incoming kinetic energy is only about 2×10^{-5} watt/m², again quite negligible compared to the energy input from the sun which is of the order of 1000 watt/m².

More important is the aerodynamic heating in the upper layers of the atmosphere. We can calculate it roughly as follows: The volume swept out by the satellite per second is $A v$ and the kinetic energy of the molecules and atoms per unit volume is $\frac{1}{2} \rho v^2$, where v is the relative velocity between the satellite and the atmosphere. One can neglect completely the temperature of the atmosphere. The power input per unit area is therefore $\frac{1}{2} \rho v^3$; at an altitude of 500 km this corresponds approximately to 10^{-1} watt/m². Even if we assume that most of the atoms are excited or ionized and carry a stored up energy of several electron volts, this would at most double the figure given above.

We therefore conclude that down to altitudes where aerodynamic heating becomes of importance, approximately 250 km, solar radiation is the only important factor determining the temperature of a satellite.

VI. Calculation of Satellite Temperature

To calculate the equilibrium temperature we equate the energy coming into the satellite to the energy being radiated from the satellite. As discussed earlier, the energy entering is composed of the visible energy from the sun, the visible sunlight reflected from the earth, and the infrared energy radiated from the earth's surface and earth's atmosphere. On the other hand the energy radiated from the satellite is simply given by $\epsilon_{IR} A \sigma T^4$ where ϵ_{IR} is the emissivity of the satellite skin in the infrared region (near 10μ) appropriate to its surface temperature.

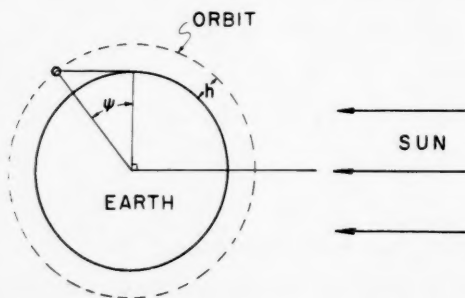


Fig. 3. The angle at which the satellite goes into the earth's shadow as a function of orbit altitude

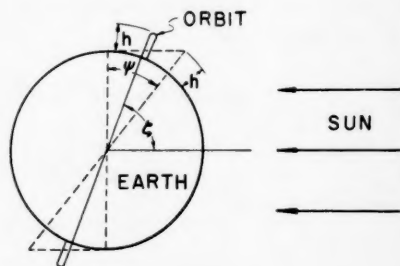


Fig. 4. A pictorial representation showing the need for considering μ , the eclipse factor

As can be seen below from an examination of all of these terms the area of the satellite enters into all of them and can therefore be cancelled out. We can therefore determine the equilibrium temperature of the satellite independent of area. The only case where the area would enter is when internal heat is produced inside the satellite. In order to be able to deal with this problem without

considering the area of the satellite specifically we will always specify internal heat produced in terms of watts per m^2 of cross sectional area of the satellite.

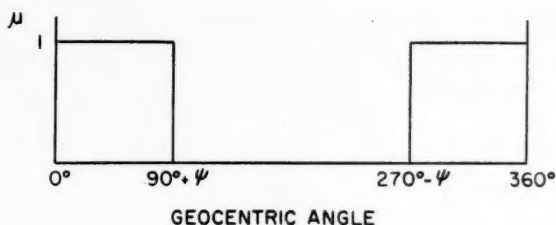


Fig. 5. The eclipse factor, μ , as a function of ψ

The satellite receives the following radiation:

1. Direct radiation from the sun: $1400 A (1 - \alpha_v) \mu$ watts where 1400 watts/m^2 is the solar constant at the earth's orbit, α_v is the visual albedo, A is the cross-sectional area of the satellite, and μ is an "eclipse factor", accounting for the fact that for slightly less than half of its orbit the satellite is shielded from the sun's direct rays by the earth. Figs. 3 and 4 show the need for considering the

eclipse factor. In Fig. 3, we see that $\cos \psi = \frac{R_E}{R_E + h}$ where ψ is the angle at which the sun's rays no longer reach the satellite, R_E is the radius of the earth, and h is the altitude of the satellite. From Fig. 4 we see that if $(90 - \psi) < \zeta$ where ζ is the angle between the orbit and the sun, then the satellite is never in the earth's shadow and $\mu = 1$. A complete discussion of the determination of ζ is given in Appendix III. For $(90 - \psi) > \zeta$, we have $\mu = 1$; for geocentric angles $90 + \psi$ (see Fig. 5), $\mu = 0$ while the satellite is in the earth's shadow, and then 1 again from $(270 - \psi)$. Hence, upon proper normalization we may write the total μ to be, for each cycle

$$\mu_T = \frac{90 + \psi}{180} \quad \text{for} \quad \psi < 90^\circ - \zeta$$

$$\mu_T = 1 \quad \text{for} \quad \psi > 90^\circ - \zeta$$

where all the angles are expressed in degrees.

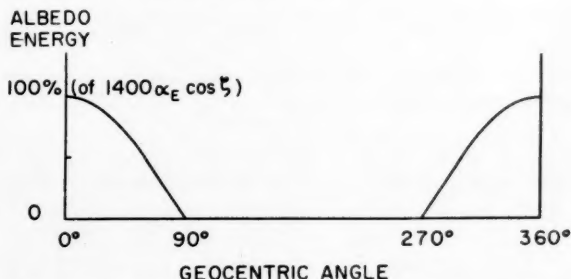


Fig. 6. Albedo energy of the satellite versus geocentric angle

2. The energy reflected from the earth is $1400 \alpha_E A \cos \zeta \cos \Phi$ where α_E is the albedo of the earth and Φ the geocentric angle of the satellite in the orbit. Fig. 6 is a representation of albedo energy, where the simplifying assumption is

made that the satellite receives reflected radiation only from the earth's surface vertically below it. Hence we see that over one cycle the average of $\cos \Phi = 1/\pi$; and the average reflected energy contribution¹ is $\frac{1400 \cos \zeta}{\pi} A \alpha_E$.

3. The energy radiated from the earth for various surface temperatures has been evaluated in section IV.

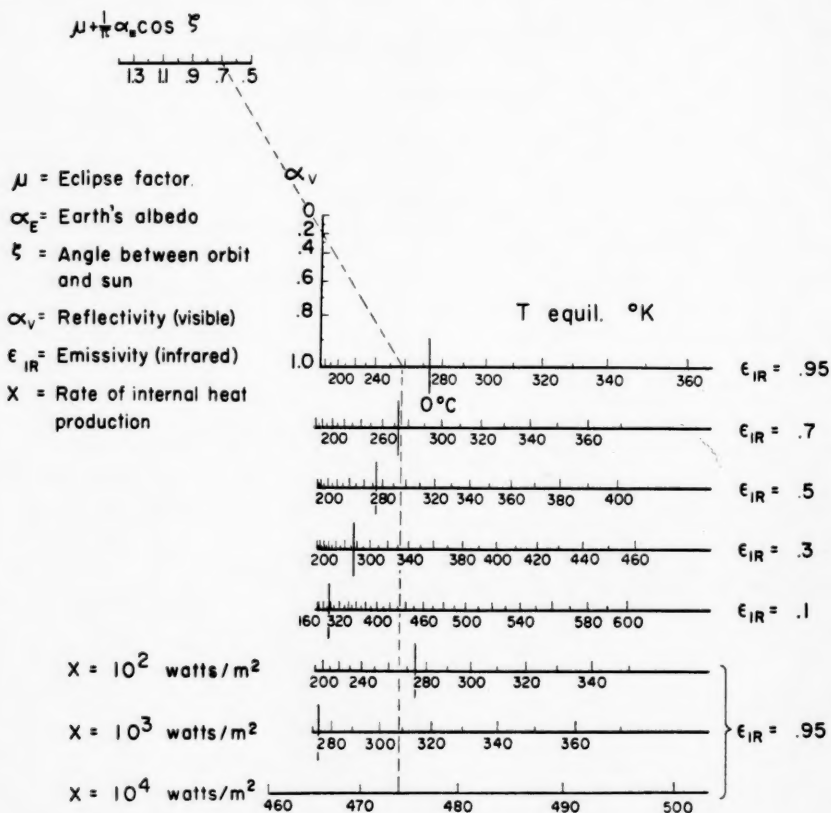


Fig. 7. Nomogram for determining the equilibrium temperature of the satellite for various properties of the skin (α_v , ϵ_{IR}), of the orbit (μ , ζ), of the earth's albedo (α_E), and for internal heat sources

Thus the total energy absorbed by the satellite, for the average earth surface temperature¹ of 14°C is

$$\left[(1 - \alpha_v) 1400 \left(\mu + \frac{\alpha_E}{\pi} \cos \zeta \right) + \epsilon_{IR} 188.5 \right] A.$$

¹ We feel justified in using such average values of the infrared flux, as well as albedo values averaged over an orbit; the heat capacity of the satellite averages out any local variations (see Section VII-3). The temperature of the satellite is therefore not a particularly suitable indicator of, e.g., the point-by-point infrared flux from the earth to space; it would be better to use an infrared detector [13].

Since equilibrium is assumed, the absorbed energy must equal the thermal radiation from the satellite

$$4 A \epsilon_{IR} \sigma T_{eq}^4$$

where T_{eq} is the equilibrium temperature of the satellite in $^{\circ}\text{K}$. Or,

$$(1 - \alpha_v) 1400 \left(\mu + \frac{\alpha_E}{\pi} \cos \zeta \right) + \epsilon_{IR} 188.5 = 4 \epsilon_{IR} \sigma T_{eq}^4.$$

Solving for T_{eq} ,

$$T_{eq} = \left[\frac{(1 - \alpha_v) 1400 \left(\mu + \frac{\alpha_E}{\pi} \cos \zeta \right) + \epsilon_{IR} 188.5}{4 \epsilon_{IR} \sigma} \right]^{1/4} {}^{\circ}\text{K}.$$

As an example, consider an equatorial orbit 200 miles (320 km) above the earth. Then $\zeta = 0^{\circ}$, $\cos \zeta = 1$, and $\mu_T = \frac{90 + 17.83}{180} = .599$. We assume an average earth albedo of .34, a visual albedo α_v of 90% and an infrared emissivity of 95%. Then,

$$T_{eq} = \left[\frac{.1(1400) \left(.599 + \frac{.34}{\pi} \right) + .95 \times 188.5}{.95 \times 4 \times 5.67 \times 10^{-8}} \right]^{1/4}.$$

Solving, $T_{eq} = 189.5 {}^{\circ}\text{K}$.

As an aid for the determination of the equilibrium temperature we have prepared a nomogram to be used for various α_E , $\cos \zeta$, α_v , and ϵ_{IR} in calculating T_{eq} . The computation of the nomogram, Fig. 7, is given in Appendix II where it is seen that the addition of parameters such as internal heat sources can be included on the horizontal line without too much additional labor. Changing the infrared emissivity and including internal sources merely moves the T_{eq} line of the nomogram along the horizontal.

VII. Special Problems

1. Internal Heat Generation

Generation of internal heat, for example by a chemical or nuclear power supply, may affect the satellite temperature markedly. After we subtract off the energy radiated away by the satellite in the form of radio energy through a transmitter, we are still left with heat energy produced by the internal power supply. As a rough guide we can say that the effect of this internal heat generation on temperature is unimportant as long as the heat generated per square meter is less than the solar energy input, i.e. of the order of 1000 watt/m². This is strikingly shown in the nomogram, Fig. 7, where we see that the equilibrium temperature rises markedly only when the internal heat generation goes much higher than 1000 watts/m².

Conversely, if we wish to keep a satellite at a reasonable temperature with a high internal generation of heat, it pays to increase the satellite diameter (and area) up to the point where the internal heat generated is of the order of 1000 watts/m². Beyond this point a further increase in area also increases the heat input from the sun. These considerations are important in the design of nuclear power supplies operating a thermodynamic engine, and allow the design of a suitable exhaust temperature for the turbine.

2. Temperature Distribution and Heat Conductivity

We will assume, for the sake of illustration, that the sphere is split into two parts with conduction taking place only in the skin. This is supposed to represent an extreme condition where one-half of the non-spinning sphere is illuminated by the sun and hot, while the other half is facing away from the sun. What we will attempt to show is that the heat flow between the two halves is very large compared to the heat input from the sun. This demonstrates that the temperature difference between the two halves cannot remain very large and disposes of the problem of calculating in detail the temperature distribution, which would be difficult to do in a general case. Even in a special case it might be better to determine the temperature distribution by experimental means.

We obtain the equilibrium temperatures on the sun-lit and on the dark side, using the methods developed earlier. This allows us to establish a tentative temperature difference across the two halves. The calculation below gives the details.

The rate of flow of heat between two isolated bodies is

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{k A \Delta T}{d}$$

where k is the coefficient of heat conduction, A is the area of the interfaces, d is the distance of separation, and ΔT is the temperature difference between them, $\Delta T = T_1 - T_2$.

The equations for T_1 and T_2 , according to procedures outlined above, are $1400(1 - \alpha_v)A - (\text{Heat loss due to conduction}) = 3A \epsilon_{IR} \sigma T_1^4$,

$1400(1 - \alpha_v)A \alpha_E \cos \zeta + \epsilon_{IR} \times (\text{infrared radiation from the earth}) \times A + (\text{heat gained by conduction}) = 3A \epsilon_{IR} \sigma T_2^4$, where T_1 is the temperature of the sunlit half, T_2 the temperature of the dark half and where, for illustration, we have chosen the time of day as local noon.

Calculation of T_1 and T_2 ignoring the heat conduction terms yields $\Delta T \approx 60^\circ\text{K}$. The heat conducted across the surfaces of steel hemispheres, with

$$k = \frac{.1 \text{ cal}}{\text{sec-cm } ^\circ\text{K}} = \frac{40 \text{ watts}}{\text{m-}^\circ\text{K}},$$

and a separation $d = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$, is

$$\frac{dQ}{dt} \approx \frac{40 \frac{\text{watts}}{\text{m-}^\circ\text{K}} \times 60^\circ\text{K}}{2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1.2 \times 10^6 \text{ watts/m}^2.$$

The heat conducted across in this particular case turns out to be many times the energy received from the sun. In this calculation we have assumed however that heat is conducted across the whole area between the two hemispheres. If conduction takes place only in the skin of the sphere, then obviously the effect of heat conductivity will become smaller the larger the satellite, since the heat conducting area only goes up as the first power of the dimension of the satellite. Again, any reasonable spin of the satellite will ensure an even skin temperature.

3. Non-equilibrium Conditions

We have already seen that when the satellite is on the sunny side of the earth it receives radiation to the amount

$$\left[(1 - \alpha_v) 1400 \left(\mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi} \right) + (\epsilon_{IR}) (188.5) \right] \text{watts/m}^2$$

and radiates $4 \epsilon_{IR} \sigma T^4$ watts/m².

When the satellite is in the earth's shadow, assuming the average nighttime temperature of the earth's surface to be 4°C , it will receive a radiation of ϵ_{IR} (175.2) A watts and radiate $4 \epsilon_{IR} \sigma T^4 A$ watts.

From thermodynamical considerations, $dQ = m c_p dT$ where Q is heat in joules, m the mass in kg and c_p the specific heat at constant pressure in joules $^{\circ}\text{K/Kg}$. In general $dQ/dt = P_{in} - P_{out}$, where P_{in} is the input power and P_{out} is the output power.

For the special case $\epsilon_{IR} = .95$,

$$P_{in} = 166.4 A \text{ watts} \quad \text{and} \quad P_{out} = \beta T^4, \\ \beta = 4 A \sigma \times .95 = 2.166 \times 10^{-7} A \text{ watts}/^{\circ}\text{K}^4.$$

Substituting

$$\frac{dQ}{dt} = m c_p \frac{dT}{dt} = P_{in} - P_{out} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{1}{m c_p} (P_{in} - \beta T^4).$$

Integrating

$$\frac{dT}{P_{in} - \beta T^4} = \frac{dt}{m c_p} \\ \frac{t}{m c_p} = \int \frac{dT}{P_{in} - \beta T^4} = \frac{1}{\beta^{1/4} 2} \int \frac{dx}{x^{1/2} (P_{in} - x^2)}$$

where $x = \beta^{1/4} T^2$;

$$\frac{2 t \beta^{1/4}}{m c_p} = \frac{1}{2 P_{in}^{3/4}} \log C \left| \frac{P_{in}^{1/4} + x^{1/2}}{P_{in}^{1/4} - x^{1/2}} \right| + \frac{1}{P_{in}^{3/4}} \tan^{-1} \frac{x^{1/2}}{P_{in}^{1/4}}$$

where C is the constant of integration.

$$\frac{2 t \beta^{1/4}}{m c_p} = \frac{1}{P_{in}^{3/4}} \left\{ \frac{1}{2} \log C \left| \frac{P_{in}^{1/4} + \beta^{1/4} T}{P_{in}^{1/4} - \beta^{1/4} T} \right| + \tan^{-1} \frac{\beta^{1/4} T}{P_{in}^{1/4}} \right\}.$$

To evaluate C , we choose the parameters so that when $t = 0$, $T = 199.5^{\circ}\text{K}$. Substituting back we find

$$\log C = -4.1559.$$

The equation of state becomes

$$\frac{t}{m c_p} A = \frac{1}{1.9953} \left\{ -2.0780 + \frac{1}{2} \log \left| \frac{3.591 + .02157 T}{3.591 - .02157 T} \right| + \tan^{-1} \frac{.02157 T}{3.591} \right\}.$$

A graph of $\frac{t}{m c_p} A$ vs. T has been drawn (Fig. 8).

We now work out the following specific example for the MOUSE satellite: We select $A = .0314 \text{ m}^2$, $m = 20 \text{ kg}$, $c_p = .10 \text{ cal/gm}^{\circ}\text{K} = 3.42 \times 10^3 \text{ joule/kg}^{\circ}\text{K}$, the specific heat of steel.

Thus,

$$\frac{t}{c_p m} A = \frac{t}{20 \times .42 \times 10^3} \times 3.14 \times 10^{-2} = 3.74 \times 10^{-6} t.$$

For $t = 45$ minutes, the length of time that the satellite remains in the earth's shadow,

$$\frac{t}{c_p m} A = 10.1 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{watts } ^{\circ}\text{K}}.$$

Inspecting Fig. 8 we see that for such a short abscissa interval the graph can be considered a straight line. Thus it is only necessary to average the day and night radiation received by the satellite and thus determine its temperature, as we have done in computing the equilibrium temperature.

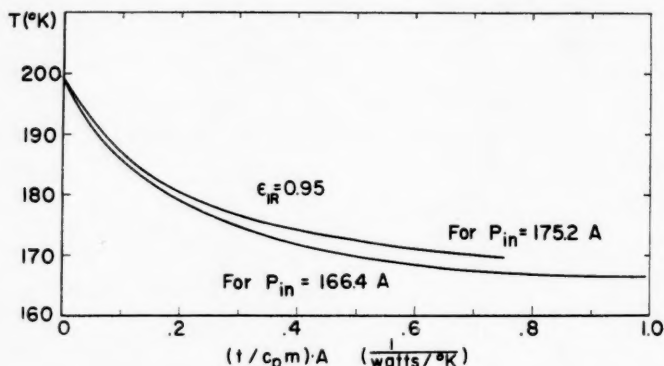


Fig. 8. Cooling curve of satellite by infrared radiation ($\epsilon_{IR} = 0.95$)

4. Effect of Nearby Hot Bodies

It may be desired to operate equipment in a satellite at a reasonably low temperature while another portion of the satellite e.g. the nuclear power supply is at a very high temperature. In this case we cannot rely entirely on thermal insulation but must physically separate the two parts of the satellite. The question then arises how far to separate them in order to keep the energy transfer within reasonable limits.

Again we apply the consideration that the energy radiated from the hot part A to the cold part B should be of the order of magnitude of the energy received from the sun. If body A runs at temperature T_A and has an area A_A , then the amount of heat received by B from A will be approximately $\sigma T_A^4 \times A_B \times A_A/d^2$, where d is the separation between A and B . We wish to compare this with $1400 A_B$. We find therefore that the separation should be $d \geq (\sigma T_A^4 A_A/1400)^{1/2}$.

Appendix I: Evaluation of Albedo of Planet Earth

In many applications it is satisfactory to use an average albedo for the planet earth of 34–35%, corresponding to a cloudiness of 54% (see e. g. Ref. [10]). The albedo in various spectral intervals, however, depends on the degree of cloudiness (see Table II), as well as on the type of earth's surface (see Table III) and on the solar zenith angle in the case of ocean surface (see Table IV). Of course the satellite itself will give us the best information on the proper values of the earth's albedo and its variation with time [12, 13].

The incident solar energy Q (1400 watts/m²) can be divided into three parts: Q_{uv} (in the ultraviolet region $< 0.4 \mu$), Q_v in the visible region ($0.4 - 0.7 \mu$), and Q_{IR} in the infrared region $> .74 \mu$. Table II shows the fraction of Q and fraction Q_v , Q_{uv} , and Q_{IR} respectively, reflected from the atmosphere, clouds and the average earth under various conditions of average cloudiness. The reason for subdivision into three spectral intervals is that the satellite may often have different reflectivities, depending on the nature of the skin surface.

Table II
0% Cloudiness

Atmosphere	$0.04 Q$ $0.445 Q_{uv}$	$\uparrow \downarrow$ $0.09 Q$	$0.08 Q$ $0.178 Q_v$	$\uparrow \downarrow$ $0.45 Q$	$0.02 Q$ $0.0435 Q_{IR}$	$\uparrow \downarrow$ $0.46 Q$
Clouds	(No Clouds)		Total Albedo (\uparrow): $0.1906 Q$			
Average Earth	$0.0022 Q$ $0.0244 Q_{uv}$	\uparrow	$0.0242 Q$ $0.0538 Q_v$	\uparrow	$0.0242 Q$ $0.0526 Q_{IR}$	\uparrow

45% Cloudiness

Atmosphere	$0.026 Q$ $0.289 Q_{uv}$	$\uparrow \downarrow$ $0.09 Q$	$0.052 Q$ $0.115 Q_v$	$\uparrow \downarrow$ $0.45 Q$	$0.013 Q$ $0.028 Q_{IR}$	$\uparrow \downarrow$ $0.46 Q$
Clouds	$0.018 Q$ $0.200 Q_{uv}$	\uparrow	$0.113 Q$ $0.251 Q_v$	\uparrow	$0.102 Q$ $0.222 Q_{IR}$	Total Albedo (\uparrow): $0.347 Q$
Average Earth	$0.001 Q$ $0.0111 Q_{uv}$	\uparrow	$0.011 Q$ $0.0246 Q_v$	\uparrow	$0.011 Q$ $0.0242 Q_{IR}$	\uparrow

100% Cloudiness

Atmosphere	$0.0143 Q$ $0.159 Q_{uv}$	$\uparrow \downarrow$ $0.09 Q$	$0.0286 Q$ $0.0635 Q_v$	$\uparrow \downarrow$ $0.45 Q$	$0.0071 Q$ $0.0155 Q_{IR}$	$\uparrow \downarrow$ $0.46 Q$
Clouds	$0.0343 Q$ $0.378 Q_{uv}$	\uparrow	$0.209 Q$ $0.465 Q_v$	\uparrow	$0.189 Q$ $0.411 Q_{IR}$	Total Albedo (\uparrow): $0.4823 Q$
Average Earth						

Table III. Collected Albedo Values

Forests	0.07	{	K. BÜTTNER: Messungen der Sonnen- und Himmelsstrahlung im Flugzeug: Meteorol. Z. 46 , 525 (1929)
Grass	0.15		
Sand	0.25		
Bushes	0.10		
Fresh Snow	0.70	{	A. ÅNGSTRÖM: In the albedo of various surfaces of ground: Geograf. Ann. 7 , 323 (1925)
Old Snow	0.55		
Fresh Sea Ice	0.70		
Old Sea Ice	0.55		
Clouds		{	S. FRITZ: Solar radiant energy and its modification by the earth and its atmosphere: Compendium Meteor., Boston, Amer. Meteorol. Soc. 1951
Low	0.69		
Middle	0.48		
High	0.21		
Cumuli form	0.70		

R. J. LIST, Smithsonian Meteorological Tables, 6th ed., gives the following values:

Desert	.24 — .28	Sand, dry	.18
Fields	.03 — .25	Sand, wet	.09
Forests	.03 — .10	Snow or Ice	.46 — .86
Grass	.14 — .37	Water	.03 — .10
Ground, ore	.07 — .20	Average earth	.0568
Mold, black	.08 — .14		

Table IV. *Reflection of Sun's Radiation from the Surface of the Ocean*

Zenith Angle of Sun	0°	40°	50°	60°	70°	80°	85°
Percentage Reflected	3	3	4	6	12	25	40

For smoother sea surface; in the presence of waves the reflection may be decreased by about 20%; after H. O. SVERDRUP, in: *The Earth as a Planet* (edited by G. P. KUIPER). Chicago: University of Chicago Press, 1954.

For reflection of sun *plus* sky radiation ÅNGSTRÖM gives

Z (deg)	43.0	46.9	70.5	77.9	84.5
A (%)	3.9	5.7	13.8	30.9	46.5

Appendix II: The Construction of a Nomogram [14]

A nomogram enables the use of graphical methods in solving certain equations primarily those containing three variables, say α , β , and γ . If any two of these three quantities are known, the third follows from the equation. If we consider the determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

which reduces to

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

we see that the three points $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ and $\vec{r}_3 = (x_3, y_3)$ are collinear because the two segments $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ and $\vec{r}_2 - \vec{r}_3$ possess identical slopes and have a point \vec{r}_2 in common.

We can allow our points to represent functions of the three variables, viz.,

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(\alpha) & y_1 &= \psi_1(\alpha) \\ x_2 &= \phi_2(\beta) & y_2 &= \psi_2(\beta) \\ x_3 &= \phi_3(\gamma) & y_3 &= \psi_3(\gamma). \end{aligned}$$

The points of the nomogram are gotten by choosing values for the parameters α , β , and γ and plotting the corresponding points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) and (x_3, y_3) for each of the values of the parameters.

As an example we choose the common multiplicative form

$$\varepsilon_1(\alpha) \varepsilon_2(\beta) = \varepsilon_3(\gamma). \quad (1)$$

This can be written

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

which by suitable determinant algebra reduces to

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 1 + \varepsilon_1 \\ 1 & \varepsilon_2 & 1 \\ 0 & -\varepsilon_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1} & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 & 1 \\ 0 & -\varepsilon_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

We note immediately that

$$\begin{aligned} x_1 = \phi_1(\alpha) &= \frac{\varepsilon_1(\alpha)}{1 + \varepsilon_1(\alpha)} & y_1 = \psi_1(\alpha) &= 0, \quad \text{the } x\text{-axis} \\ x_2 = \phi_2(\beta) &= 1 & y_2 = \psi_2(\beta) &= \varepsilon_2(\beta) \\ x_3 = \phi_3(\gamma) &= 0, \quad \text{the } y\text{-axis} & y_3 = \psi_3(\gamma) &= -\varepsilon_3(\gamma). \end{aligned}$$

As a further illustration, we consider the problem at hand. We wish to set up a nomogram for

$$T_{eq} = \left[\frac{(1 - \alpha_v) 1400 \left(\mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi} \right) + \epsilon_{IR} \{188.5\}}{4 \epsilon_{IR} \sigma} \right]^{1/4} \text{ } ^\circ\text{K} \quad (2)$$

where the terms have been defined previously. We select as our variables T_{eq} , the equilibrium temperature, α_v , the visible albedo of the satellite, and $\left(\mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi} \right)$ which determines the amount of visible radiation received by the satellite. Accordingly we choose $\epsilon_{IR} = .95$, and a surface temperature of 14°C .

We shall rewrite (2) in the form of (1):

$$T_{eq}^4 = \left[\frac{(1 - \alpha_v) 1400 \left(\mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi} \right) + .95 \times 188.5}{4 \times .95 \times 5.67 \times 10^{-8}} \right].$$

$$21.7 \times 10^{-8} T_{eq}^4 = (1 - \alpha_v) 1400 \left(\mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi} \right) + 179.0 + X$$

where we have now included an internal heat source explicitly. Transposing,

$$-\frac{X}{1400} + 1.55 \times 10^{-10} T_{eq}^4 - .1279 = (1 - \alpha_v) \left(\mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi} \right). \quad (3)$$

Comparing (3) with (1), we see that

$$\varepsilon_1(\alpha_v) = 1 - \alpha_v$$

$$\varepsilon_2(\alpha_v \cos \zeta) = \mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi}$$

$$\varepsilon_3(T_{eq}) = 1.55 \times 10^{-10} T_{eq}^4 - .1279 - \frac{X}{1400}.$$

In terms of the points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) and (x_3, y_3) this is

$$x_1 = \frac{1 - \alpha_v}{2 - \alpha_v} \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = 1 \quad y_2 = \mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi}$$

$$x_3 = 0 \quad y_3 = .1279 - 1.55 \times 10^{-10} T_{eq}^4 + \frac{X}{1400}.$$

α_v varies from 0 - 1, and $\alpha_E \cos \zeta$ varies from 0 - 1 and $.5 \leq \mu \leq 1$. The range of T_{eq} is not immediately apparent.

Fig. 7 is the nomogram gotten by substituting values for the parameters α_v , $\mu + \frac{\alpha_E \cos \zeta}{\pi}$, T . From it we see that the minimum temperature of the satellite is

170°K while its maximum is approximately 200° above, for the parameters considered.

It is also possible to vary the temperature of the earth's surface. From eqs. (2) and (3) we see that this would affect only y_3 , increasing or decreasing the constant .1279. This is, in effect sliding the T_{eq} scale to the right or left. Exact calculation must be left to the designer who wants to use other conditions.

Appendix III: Determination of the Angle Between the Orbit of the Satellite and the Sun

The angle ζ , as defined in the text, can be seen to be just the minimum distance between the orbit of the satellite and the sub-solar point, SS. Let us

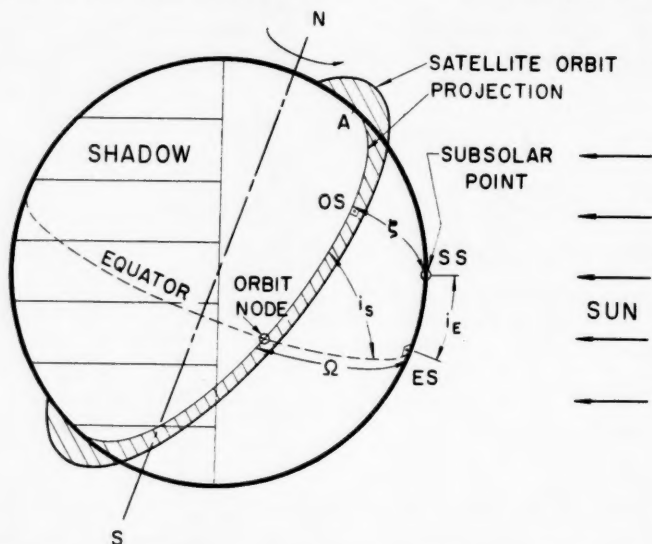
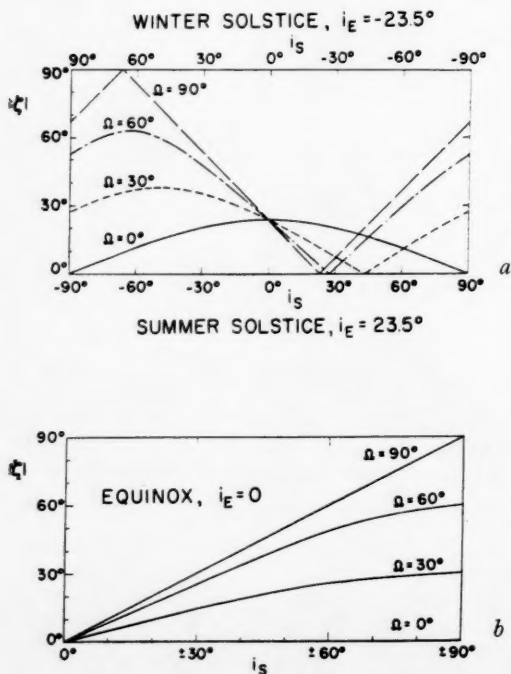


Fig. 9. The typical satellite orbit illustrating space angles ζ (the angle of closest approach to the subsolar point), the orbit parameters i_s and Ω , and the inclination of the earth to the ecliptic i_E



consider, as in Fig. 9 a satellite orbit inclined at an angle i_s to the equatorial plane. Let Ω be the distance along the equator between the sunlit node of the orbit (point at which the orbit crosses the equator) and local noon. We denote with i_E the angle between the earth's equatorial plane and the ecliptic; i_E varies between $\pm 23\frac{1}{2}^\circ$, depending on the time of year.

From spherical trigonometry we derive the relations:

$$\cos \angle (OS - A - SS) = \cos \Omega \sin i_s$$

and

$$\tan \angle A - ES = \frac{\sin \Omega}{\cot i_s}.$$

Fig. 10. Graphs for determining the angle ζ as a function of i_s and Ω . (a) is for the summer and winter solstice; (b) is drawn for the equinox

Then, from the law of sines,

$$\sin \zeta = \sin \left(-i_E + \tan^{-1} \frac{\sin \Omega}{\cot i_S} \right) \sqrt{1 - \cos^2 \Omega \sin^2 i_S}.$$

This can be simplified to:

$$\sin \zeta = \sin i_S \sin \Omega \cos i_E - \cos i_S \sin i_E.$$

This relationship of ζ on orbit parameters i_E and Ω , and on the ecliptic angle i_E can best be exhibited graphically (Fig. 10).

Appendix IV: Absorption of Visible Radiation from the Sun Incident on a Satellite Above the Earth

Here we consider the small absorption effects by the residual atmosphere between the satellite and the sun. The geometrical situation is as follows:

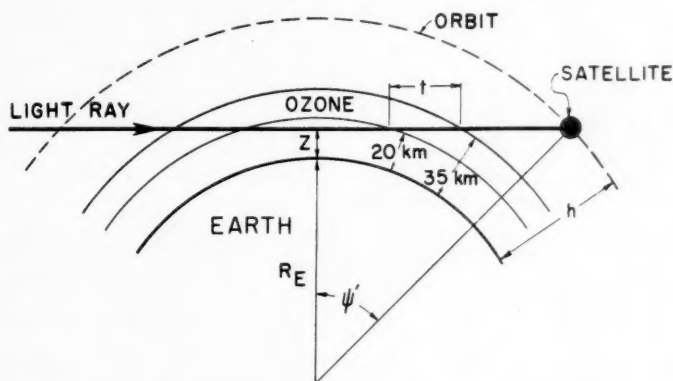


Fig. 11. Radiation paths showing absorption by the earth's atmosphere

From the diagram, Fig. 11,

$$\cos \psi' = \frac{R_E + Z}{R_E + h}.$$

A. Rayleigh Absorption

The attenuation of light of wavelength λ passing through N molecules is given by $e^{-\beta_\lambda N}$ where β_λ is the attenuation per air molecules given by HULBURT [15]. HULBURT indicates that $N = Kn$ where K is an empirically derived constant $= 2.64 \times 10^7 \text{ cm}$ and n is the molecular density at Z and is listed in HULBURT's paper. The incident ray passes through $2N$ molecules so the RAYLEIGH attenuation is given by $e^{-\beta_\lambda n \times 5.27 \times 10^7}$.

Values of the attenuation are plotted in Fig. 12 for various Z .

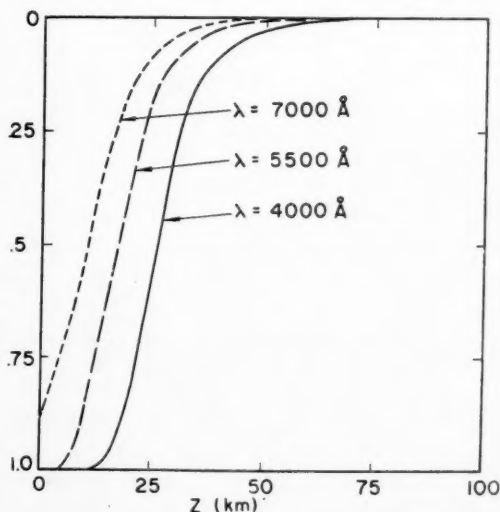


Fig. 12. Attenuation of visible radiation due to RAYLEIGH scattering

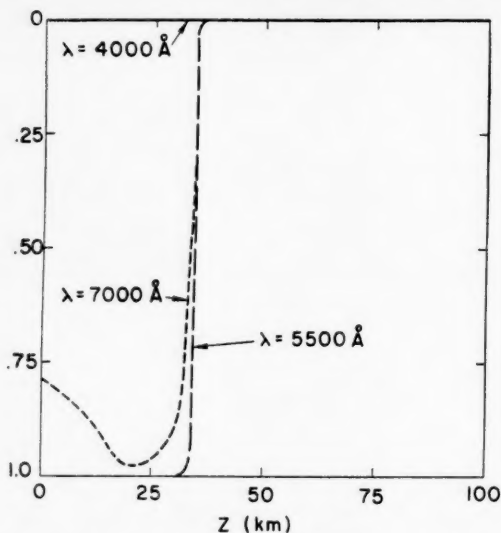


Fig. 13. Attenuation of visible radiation due to absorption by the CHAPPUIS bands of ozone

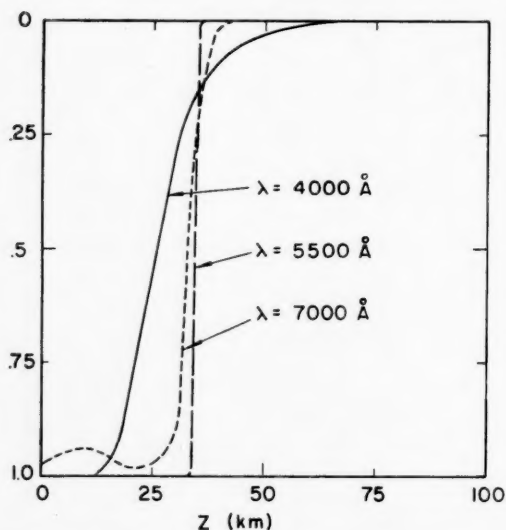


Fig. 14. Total attenuation of visible radiation due to passage through the earth's atmosphere

B. Absorption due to the CHAPPUIS Band of Ozone

We assume a uniform distribution of ozone between the levels 20 km and 35 km above the earth. Since this corresponds to 2.4 mm at STP we must multiply thicknesses by

$$\frac{2.4 \text{ mm}}{15 \text{ km}} = .16 \text{ mm/km.}$$

The half-thickness, t , through which the ray passes is gotten from the Pythagorean relationships

for $0 \leq Z \leq 20$,

$$t = [(40 - 2Z) R_E + 400 - Z^2]^{1/2} + [(70 - 2Z) R_E - Z^2 + 1225]^{1/2};$$

for $20 \leq Z \leq 35$,

$$t = [2 R_E (35 - Z) + 1225 - Z^2]^{1/2};$$

and 0 for $Z > 35$.

The attenuation once again is of the form $e^{-\beta'_\lambda (2t)}$ where β'_λ is the absorption coefficient of the CHAPPUIS band of ozone given by HULBURT [15] and $2t$ is the thickness of ozone which the ray traverses.

The attenuations for different λ and Z are plotted in Fig. 13. Fig. 14 contains the product of the two attenuations. Note that for

$$Z > 50 \text{ km,}$$

$$\text{or } \psi' < 16^\circ 20'$$

there is no attenuation observed. Since $Z = 0$ corresponds to $\psi' = 17^\circ 50'$, attenuation occurs only in a rather small angular range and the effects considered in this section need not be accounted for in the temperature determination.

References

1. K. EHRLICHE (WALTER GORM), Weltraum 3, Dec. (1942).
2. R. L. STERNBERG, Some Remarks on the Temperature Problem of the Interplanetary Rocket. J. Amer. Rocket Soc. No. 70, p. 34, June 1 (1947).
3. K. BÜTTNER, in: Physics and Medicine of the Upper Atmosphere, Chap. VI (edited by C. S. WHITE and O. O. BENSON). Albuquerque: University of New Mexico Press, 1952.

4. L. HANSEN, Temperaturproblem in der Astronautik, presented at 6th IAF Congress, Copenhagen, August 1955.
5. P. E. SANDORFF and J. S. PRIGGE, JR., Thermal Control of a Space Vehicle. *J. Astronautics* **3**, 4 (1956).
6. P. R. GAST, Insolation of the Upper Atmosphere and of a Satellite, presented at Upper Atmosphere Rocket Research Panel Meeting, Ann Arbor, Mich., January 1956.
7. J. C. JOHNSON, *Physical Meteorology*, Chap. 4. New York: Wiley and Technology Press, 1954.
8. G. C. SIMPSON, *Mem. Roy. Meteorol. Soc.* **2**, 16 (1928).
9. F. L. WHIPPLE, in: *Physics and Medicine of the Upper Atmosphere*, Chap. X (edited by C. S. WHITE and O. O. BENSON). Albuquerque: University of New Mexico Press, 1952.
10. S. FRITZ, *J. Meteorol.* **6**, 277 (1949).
11. S. FRITZ, in: *Compendium of Meteorology*. Boston, Amer. Meteorol. Soc., 1951.
12. H. WEXLER, *J. Brit. Interplan. Soc.* **13**, 269 (1954).
13. S. F. SINGER, *Geophysical Research with Artificial Satellites*, in: *Advances in Geophysics*, Vol. 3 (edited by H. LANDSBERG). New York: Academic Press, 1956. For meteorological applications, see also: *Trans. Amer. Geophysic. Union* **38** (1957).
14. See, for example, D. H. MENZEL, *Fundamental Formulas of Physics*, p. 141. New York: Prentice-Hall, 1955.
15. E. O. HULBURT, *J. Opt. Soc. Amer.* **43**, 113 (1953).
16. F. S. JOHNSON, J. D. PURCELL, R. TOUSEY, and N. WILSON, in: *Rocket Exploration of the Upper Atmosphere*, p. 287 (edited by R. L. F. BOYD and M. J. SEATON). London: Pergamon Press Ltd., 1954.

The Case for the Low Acceleration Spaceship

By

H. F. Michielsen¹, ARS, AAS, BIS

(Received March 19, 1956)

Abstract. This paper deals with escape trajectories of spaceships, wherein extremely low accelerations are applied. Many revolutions around the central attracting body are required for completion of such low acceleration maneuvers. While low acceleration is shown to be less efficient than short-time high acceleration, the losses are not prohibitive and are balanced by certain advantages, that are discussed in some detail.

Emphasis is on simplicity of numerical evaluation, without appreciable sacrifice of efficiency. The approach involves inversion of the formulation of the problem. The acceleration, due to propulsion, is determined from an assumed trajectory, to be adjusted by trial and error to preset specifications of this acceleration. The manageability of this approach is demonstrated and its merits and potentialities for practical navigation are underlined. The direction of further development is indicated.

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit behandelt Fluchtkurven für Raumfahrzeuge, wenn äußerst geringe Beschleunigungen angewendet werden. Dabei werden für die Vervollständigung der Fahrtmanöver viele Umfahrungen des anziehenden Zentralkörpers erforderlich. Es zeigt sich, daß geringe Beschleunigung weniger wirksam ist als eine kurze Zeit andauernde hohe Beschleunigung. Diese Verluste sind aber kein Ausschließungsgrund und werden durch gewisse Vorteile aufgewogen, die in Einzelheiten dargelegt sind.

Das Hauptgewicht ruht auf der numerischen Auswertung ohne nennenswertes Opfer an Wirtschaftlichkeit. Das Verfahren beruht auf Umkehrung der Problemstellung. Die Antriebsbeschleunigung wird aus einer angenommenen Bahn bestimmt, die durch Versuchsrechnung solange modifiziert wird, bis sie die für die Beschleunigung gestellten Bedingungen erfüllt. Es wird gezeigt, daß sich dieser Weg praktisch beschreiten läßt; dessen Vorteile und Möglichkeiten für die praktische Navigation werden unterstrichen. Die Abhandlung gibt die Richtung an, wonach die Methode weiter entwickelt werden kann.

Résumé. Cet article étudie la possibilité de libérer un astronef d'un champ de gravitation en lui communiquant une accélération faible nécessitant alors plusieurs circuits autour du centre d'attraction. Cette manoeuvre est moins efficace qu'une accélération élevée et de courte durée. Cependant les pertes d'énergie ne sont pas prohibitives et sont compensées par certains avantages qui sont alors détaillés.

L'accent est mis sur la simplicité de l'évaluation numérique sans sacrifice appréciable de l'efficacité. Dans ce but le problème est abordé à rebours. L'accélération due à la propulsion est calculée à partir d'une trajectoire hypothétique qui est ensuite ajustée par tâtonnements en vue de satisfaire aux conditions que cette accélération doit remplir. Les possibilités d'une telle méthode et ses avantages comme règle pratique de navigation sont soulignées. La direction dans laquelle la méthode doit être développée est indiquée.

¹ Structures Engineer, Lockheed Aircraft Corp., Burbank, Calif., USA.

I. Introduction

Spaceflight today means rocket propulsion and the familiar concept of rockets is one of noisy, powerful devices, exerting tremendous accelerations to sharp edged, missile shaped, vehicles. In contemporary technical publications it is generally realized that considerable advantages accrue from a clear distinction between those vehicles which partially have to be used inside an atmosphere and those serving communications outside any atmosphere. In shaping the latter "outer-space-bound" vehicles we then can refrain from those aerodynamic and thermodynamic considerations that determine the typical aspect of present day rockets. Many projects reflect this concept. It is remarkable, however, that, while the absence of atmospheric effects is fully realized and taken advantage of, another basic feature has not so far received the emphasis, which it seems to deserve. Reference is made to the possibility of rigorously restricting maximum accelerations, once the vehicle is placed into an orbit, completely outside the atmosphere.

One reason for this neglect may be the recognized fact that a considerably higher total impulse is required (especially on escape and reentry trajectories) if a low acceleration is stretched out over a long period of time, rather than applying a high acceleration over a short period. An adequate quantity to express the relative efficiencies of different trajectories is the required characteristic velocity. The *characteristic velocity* is defined as the total change in velocity, resulting from a considered program of operation of a rocket system, if it were performed in empty, non-gravitational space. As such it is a measure for the accomplishment of the propulsion device in the system. In fact, it is the time integral of the acceleration of the ship, due solely to the propulsion device.

The ratio between the required characteristic velocities in the two cases of low and high acceleration, mentioned above, is of the order of 2 or 2.5, as will be shown later. However, what determines the economy of a flight plan is not the characteristic velocity as such, but rather its ratio to the exhaust velocity of the rocket. In other words, if a rocket were designed with an exhaust velocity two and a half times as high as thus far available, but inevitably involving extremely low accelerations, then the better exhaust velocity would outweigh completely the higher required characteristic velocity and the low acceleration rocket would be more economical in an absolute sense, as far as mass ratio considerations are concerned.

The assumption above is admittedly hypothetical. Proposals like OBERTH's ion rocket [1] could not yet be substantiated experimentally. It seems, therefore, sound policy to base projects for spaceflight on available technical knowledge, rather than to speculate on still undeveloped better devices. It is to the merit of VON BRAUN [2] to have proved that, potentially, spaceflight can be realized by means of propulsion available today. But the solving of the financial problem, involved with VON BRAUN's project, seems at least as speculative as the solving of the technical problem in OBERTH's proposal. In other words: as long as better than present day rockets are not available, manned spaceflight, farther out than a short orbit around the earth, appears economically questionable.

"Better" in this case means primarily offering a higher exhaust velocity. This must not necessarily imply low acceleration, but it may do so. However, low acceleration has also some advantages by itself.

First it permits considerably lighter structures. Stresses in a space vehicle, travelling outside the atmosphere, accrue from three sources only, viz. internal pressures, centrifugal forces and those inertia forces induced by the rocket thrust. Both internal pressures and centrifugal forces (accruing from deliberate rotation of living compartments in order to establish artificial gravity) mainly give rise to tension stresses. The inertia forces from rocket thrust however cause the more critical bending and compression loads. It is evident that a close approach to apparent weightlessness is of considerable advantage from the standpoint of strength.

Another consideration lies in the physiological field. The effect of weightlessness on humans is still an extremely controversial problem. A viewpoint, voiced recently by H. HABER [3], is however certainly remarkable. From tests on the effect of weight-

lessness, carried on in aircraft, HABER felt inclined to conclude that orientation becomes difficult only when *absolute* weightlessness is approached. A small acceleration however would suffice to do away with most of the adverse effects.

Small accelerations in the physiological sense are supposed to be of the order of .05 g. Accelerations lower than .01 g are suspected to be imperceptible [4]. It seems, therefore, that rotating living compartments are a must in any kind of spaceship, since the well-being of the occupants cannot be made subject to the operation of the propulsion system. A continuous acceleration of .01 g or more could, at least most of the time, transform non-rotating compartments into agreeable living areas as well. This would, for instance, greatly facilitate celestial observations. Whether or not the ability of the human body to adjust itself to novel circumstances after prolonged exposure will sharpen his perceptivity to still lower accelerations is a question that will probably remain open for some time to come.

The rotating compartments, also, would profit from a continuous low acceleration. A short time, high acceleration would very much upset the furnishing of such rooms, since it would not only change the magnitude but also the direction of the resulting apparent gravity. This would only be true to an extremely small extent in the case of long period low acceleration, since variation of this acceleration would be so much smaller.

II. General Approach

Considering the advantages (and possibly inevitability) of low acceleration propulsion, it seems worthwhile to investigate the mechanics of its trajectories. The literature in this field is relatively small, as compared with the vast amount of studies dealing with high acceleration (impulsive) trajectory control. FORBES [5], PRESTON-THOMAS [6] and TSIEN [7] are among those who have investigated some of the principal characteristics of low acceleration trajectories. In all these papers, however, rather unrealistic assumptions concerning magnitude or direction of the thrust were made in order to arrive at some kind of a numerical interpretation. A recent paper by LAWDEN [8] treats the subject more rigorously, especially with optimization in mind. It should be noticed however that his solution gains significance only after a considerable amount of numerical integration has been performed and results compared.

The present paper is a further development of work [9] prepared by the author in 1952 and distributed in limited number to delegates of the Third International Congress on Astronautics in Stuttgart. It was written in German with an English summary, and a short abstract was published in the Congress Proceedings [10]. Some of the basic ideas underlying this approach are outlined below.

It seems that closed form solutions of the problem under consideration are unlikely ever to be found, except for some simple but unrealistic assumptions. Therefore numerical integration would be the answer [8]. It is straightforward but costly, time consuming and inherently inaccurate.

With respect to this procedure another consideration is worth mentioning. Suppose we are in a spaceship, heading for Mars, for example. An optimal trajectory for this trip has been calculated in advance on electronic equipment, including programming of the magnitude and the direction of the thrust to be applied at every moment of the flight. Are we able to follow this program exactly?

It should be kept in mind that the accuracy, with which the propulsion can be controlled, is likely to be a "technical", rather than an "astronomical" one. In addition, the propulsion device, in contrast to the law of gravity, is apt to fail. If anything unforeseen happens we will probably have to reprogram the whole trip, for in most cases it will be impossible to resume the old trajectory at the proper time, once we have been thrown off the track by technical failures of any kind. This reprogramming must be performed on board the ship, in a limited period of time. Are we certain that we can and want to carry with us the equipment and manpower required for doing this job? And do we want to rely on this delicate equipment,

the failure of which could be another cause of getting lost in the infinity of space, if no other means of programming were available?

The above considerations justify the pursuit of alternate solutions. Actually, closed form solutions for the trajectory of a space vehicle under extended low thrust are available and can be handled numerically, almost with the slide rule and readily with a desk calculator. These solutions, however, have one disadvantage: they are not straightforward. The principle is, rather than to compute the trajectory from known thrust components, to compute the thrust components from the known trajectory. This problem is extremely simple but is only significant, if the resulting thrust is, at all times, obtainable and economically justifiable. This in general requires a "trial and error" procedure. By research in this field a considerable amount of "know how" can be accumulated, such that realistic estimates of trajectories than can be made readily without risking objectionable departure from optimal conditions.

An important advantage of this approach is also that perturbations by other celestial bodies are taken care of more easily. Since the locations in space, in function of time, are fixed accurately from the outset, accelerations due to perturbations are also known quantities and can be *compensated for by corresponding corrections of the thrust vector*. Admittedly realization of this concept can meet with difficulties under unfavorable conditions. However, as a rule it permits us to disregard perturbations *to begin with*, without sacrificing any accuracy in the *final* navigational program and without sacrificing appreciably the efficiency. Clearly, transition from one central gravitational field to the other, for instance from that of the Earth to that of the Sun, must be established at appropriate points. Further considerations on this subject will be dealt with in a consecutive paper.

As far as optimal conditions are concerned it should be noted that, as in other technical fields, the exact formulation and solution of absolute optima is generally not very important for practical application. Actual navigation will have to compromise, first between elapsed time and fuel consumption. Further factors may enter the problem. What is wanted is generally the amount of penalty, associated with any departure from optimal conditions, rather than the exact determination of these conditions proper.

In this paper efficiency and optimization are always understood to refer to fuel consumption, for which the characteristic velocity is an adequate yardstick. Specific solutions aim at the best efficiency, obtainable by relatively simple means, and at an estimate of how much this efficiency lags behind the absolute optimum rather than at absolute optimization.

III. General Solution

We now consider the two-dimensional problem of movement of a body within a fixed plane through an attracting central body and effected in addition by rocket thrust in the same plane. The basic equations of movement are:

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \dot{v}_t + v_r \omega \\ a_r &= \dot{v}_r - v_t \omega + \frac{K}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

In these equations, the subscripts t and r stand for "tangential" and "radial" respectively. The velocity is designated by v , and a is the acceleration, which the rocket thrust would exert on the vehicle, in absence of any other forces:

$$a = \frac{c}{m} \left(\frac{dm}{dt} \right) \quad (2)$$

where c is the exhaust-velocity of the rocket, m the mass of the ship and t the time. In Eqs. (1) the terms with ω (the angular velocity) result from well-known transformation formulae, whereas K/r^2 represents gravity. Obviously r is the

distance of the moving ship from the central attracting body with mass M , whereas K is the product of the gravitational constant f and the mass M .

Since, by definition:

$$\omega = \frac{v_t}{r} \quad (3)$$

and

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

Eqs. (1) can be rewritten, replacing the time derivatives by derivatives with respect to r :

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \left(\frac{dv_t}{dr} + \frac{v_t}{r} \right) v_r \\ a_r &= \frac{dv_r}{dr} v_r - \frac{v_t^2}{r} + \frac{K}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

By putting $a_t = a_r = 0$ and $v_r = 0$, i.e. assuming a circular orbit without rocket action, Eqs. (5) yield

$$v_t^2 = \frac{K}{r}.$$

This tangential velocity is known as the local circular velocity v_c :

$$v_c = \sqrt{\frac{K}{r}} \quad (6)$$

and seems to be an adequate unit for expressing actual velocities in non-dimensional form.

Defining

$$v = \beta v_c \quad (7)$$

and remembering that from Eq. (6)

$$\frac{dv_c}{dr} = -\frac{v_c}{2r}$$

Eqs. (5) can be rewritten, introducing again Eq. (6):

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \left(\frac{d\beta_t}{dr} + \frac{\beta_t}{2r} \right) \beta_r \frac{K}{r} \\ a_r &= \left[\left(\frac{d\beta_r}{dr} - \frac{\beta_r}{2r} \right) \beta_r - \frac{\beta_t^2 - 1}{r} \right] \frac{K}{r} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

The accelerations can be made non-dimensional by expressing them in terms of a nominal acceleration a_0 , which might be the maximum acceleration by rocket thrust alone, or a "cruising"-acceleration, or any other nominal value, associated with the possible rocket-output. Again defining

$$a = \alpha a_0 \quad (9)$$

Eqs. (8) develop into:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= \left(\frac{d\beta_t}{r dr} + \frac{\beta_t}{2r^2} \right) \beta_r \frac{K}{a_0} \\ \alpha_r &= \left[\left(\frac{d\beta_r}{r dr} - \frac{\beta_r}{2r^2} \right) \beta_r - \frac{\beta_t^2 - 1}{r^2} \right] \frac{K}{a_0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Now, (K/a_0) being a constant, a new variable φ can be introduced, to replace r :

$$\varphi = \frac{a_0 r^2}{K} \quad (11)$$

yielding, from Eqs. (10):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= \left(2 \frac{d\beta_t}{d\varphi} + \frac{\beta_t}{2\varphi} \right) \beta_r \\ \alpha_r &= \left(2 \frac{d\beta_r}{d\varphi} - \frac{\beta_r}{2\varphi} \right) \beta_r - \frac{\beta_t^2 - 1}{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Eqs. (12) now can be used, as outlined before, to find adequate trajectories. The procedure is: assume functions for β_t and β_r in terms of φ , and compute the associated functions for α_t and α_r from Eqs. (12). Then check whether or not the functions for α_t and α_r are acceptable solutions. For instance, in the case of an escape from a circular orbit into infinity the requirement could be that, at any time, the angle between the resulting α and the resulting β be small, so that the rocket thrust be essentially tangential to the trajectory. In addition to that the magnitude of α should be of the order of unity and vary only slightly.

This might be the proper place to note that the first mentioned requirement is actually not strictly optimal. The condition for minimum characteristic velocity is roughly that the direction of the rocket thrust be about midway between the tangent to the trajectory and the normal to the radius vector, at least in the earlier stages of the maneuver. The basic principles, underlying this statement, have been shown extensively in Ref. [9] and also in Ref. [10]. They were again stated in Ref. [8]. In an appendix some new views with respect to this "throw-off" are presented. It should, however, be noted that apparently the difference between the characteristic velocities in the case of optimal programming on one side and in the case of tangential programming on the other, is relatively small (probably of the order of 1%).

A relatively obvious solution of Eqs. (12) is:

$$\beta_t = 1 \quad \beta_r = 2\varphi \quad (13)$$

yielding

$$\alpha_t = 1 \quad \alpha_r = 6\varphi. \quad (14)$$

Clearly this solution has two weak features: First, calling (β_r/β_t) the "slope" of the velocity vector and (α_r/α_t) the "slope" of the thrust vector, it is seen that the ratio between the slopes of thrust and velocity vectors equals 3 consistently, instead of being about $\frac{1}{2}$, as required for minimum fuel consumption. And further, the resulting thrust $\alpha = (1 + 36\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$ increases gradually from unity to $\sqrt{10} = 3.16\dots$ for $\beta = \sqrt{2}$ = escape velocity.

For extremely small values of φ the "slope ratio", mentioned above, can be made to equal $\frac{1}{2}$ by assuming

$$\beta_t = 1 + 2.5\varphi^2. \quad (15)$$

Eqs. (12) then yield, again with $\beta_r = 2\varphi$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= 1 + 22.5\varphi^2 \\ \alpha_r &= \varphi - 6.25\varphi^3 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Now, with increasing values of φ , the "slope ratio" soon decreases considerably below $\frac{1}{2}$ and in addition $\alpha = (\alpha_t^2 + \alpha_r^2)^{\frac{1}{2}}$ still increases in excess of unity. The last mentioned objection can be taken care of by introducing:

$$\beta_r = 2\varphi(1 - 23\varphi^2) \quad (17)$$

in which case we find for α_r :

$$\alpha_r \approx \varphi - 650.25\varphi^3 + \dots \quad (18)$$

Apparently, solving Eqs. (12) by the method of gradually determining unknown coefficients in power series, leads to extreme divergence under the required conditions. That is why it was stated before that Eqs. (12) will be solved by estimating functions for β_t and β_r in terms of φ , so that, only approximately:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_r \beta_t}{\alpha_t \beta_r} &\approx \left(\frac{\alpha_r \beta_t}{\alpha_t \beta_r} \right)_{opt} \\ \alpha &= \sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_r^2} \approx 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

where $[(\alpha_r \beta_t)/(\alpha_t \beta_r)]_{opt}$ has to be determined by the method shown in the appendix.

From the foregoing it is clear, however, that Eqs. (13) are adequate assumptions for extremely low values of φ and that β_t and β_r will gradually depart from 1 and 2φ respectively with increasing φ .

Eqs. (12) virtually relate rocket thrust vector, velocity vector and radius magnitude. They do not yet include the direction of the radius vector and the time. Prior to presenting specific solutions of Eqs. (12), satisfying Eqs. (19), expressions for the time and for the direction of the radius vector will now be derived.

The time is readily found from Eq. (4), rewritten:

$$t = \int \frac{dr}{v_r}. \quad (20)$$

With Eqs. (6) and (7) we then have

$$t = \int \frac{dr}{\beta_r \sqrt{K/r}} = \frac{1}{2\sqrt{K}} \int \frac{d(r)^2}{\beta_r \sqrt{r}}$$

and using Eq. (11)

$$t = \frac{(K/a_0)^{3/4}}{2\sqrt{K}} \int \frac{d\varphi}{\beta_r \varphi^{1/4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{a_0^3}} \int \frac{d\varphi}{\beta_r \varphi^{1/4}}. \quad (21)$$

From Eqs. (13) through (18) the impression was gained that β_r is of the order of 2φ . This suggests a new symbol γ_r , defined by

$$\beta_r = \frac{2\varphi}{\gamma_r}. \quad (22)$$

Using this notation Eq. (21) reads

$$t = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{K}{a_0^3}} \int \gamma_r \varphi^{-5/4} d\varphi \quad (23)$$

where γ_r is a function of φ , to be determined by trial and error.

An interesting further development of Eq. (23) can be found by introducing the circular velocity v_c , using Eqs. (6) and (11)

$$v_c = \sqrt{\frac{K}{r}} = \sqrt{\frac{K a_0}{\varphi}}, \quad (24)$$

hence

$$dv_c = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{K}{a_0}} \varphi^{-5/4} d\varphi. \quad (25)$$

Combining Eqs. (25) and (23), we have:

$$a_0 t = - \int \gamma_r dv_c. \quad (26)$$

While Eq. (26) is certainly not adequate for numerical evaluation, it permits a first estimate of the required time and the characteristic velocity for a specific maneuver. Apparently the latter is of the order of the difference between the circular velocities at the start and end of the trajectory under consideration. Since γ_r is generally greater than unity, as will be shown later, this estimate is low.

The consecutive directions Θ of the radius vector are found by definition from

$$\Theta = \int \omega dt. \quad (27)$$

From Eqs. (3) and (4) we have

$$\omega = \frac{v_t}{r} \quad dt = \frac{dr}{v_r},$$

hence, using Eqs. (7) and (11):

$$\Theta = \int \frac{\beta_t}{\beta_r} \left(\frac{dr}{r} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{\beta_t}{\beta_r} \left(\frac{d\varphi}{\varphi} \right). \quad (28)$$

Finally, again introducing the notation (22):

$$\Theta = \frac{1}{4} \int \beta_t \gamma_r \varphi^{-2} d\varphi \quad (29)$$

where β_t and γ_r are functions of φ .

Again Eq. (29) can be written in a different form

$$\Theta = - \frac{1}{4} \int \beta_t \gamma_r d \left(\frac{1}{\varphi} \right). \quad (30)$$

From Eq. (11) it is seen that

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{K/r^2}{a_0}$$

where (K/r^2) , according to Eq. (1), is the local acceleration of gravity. Hence, in a first approximation neglecting $\beta_t \gamma_r$, a full revolution is accomplished ($\Delta \Theta = 2\pi$), if $(1/\varphi)$ decreases with an amount of $8\pi \approx 25.13$. In other words, the number of revolutions to be accomplished for a specific maneuver equals roughly 1/25 of the difference in accelerations of gravity at the start and end of the maneuver, the "nominal" acceleration of the rocket propulsion being used as a unit of acceleration. Again this statement yields a slightly low result, due to $\beta_t \gamma_r$ being generally greater than unity.

As an example of application of Eqs. (26) and (30), suppose we want to escape from the gravitational field of the earth, starting from a circular orbit at 1000 km altitude, where $v_c = v_{c,0} \approx 7350$ m/sec. Let the nominal acceleration of the rocket be $a_0 = 1$ cm/sec² ($\approx 1/1000$ g). Assuming that at the end of the maneuver $v_{c,e} \approx 0$, the required time is $v_{c,0}/a_0 = 7.35 \times 10^5$ sec = 8.51 days. The acceleration of gravity in the starting orbit is 732 cm/sec². The number of required revolutions is therefore about $(732/1) : (25.13) = 29.1$. The values, determined here, will later be checked with more accurate ones.

Since here actual values (in contrast to non-dimensional values) have been mentioned, it might be the proper place to consider the choice of adequate units.

Length and time are the basic dimensions, the units of which can be freely selected. We might then select those such that both K and a_0 are unity in a specific case. K is exclusively dependent upon the mass of the body that is circumnavigated, whereas a_0 is solely determined by the specification of the rocketship.

With

$$K = 1 \quad \text{and} \quad a_0 = 1 \quad (31)$$

Eq. (1) indicates that the unit of length, then, is the distance \bar{r} , at which the acceleration (K/\bar{r}^2) of gravity equals the "nominal" acceleration $a_0 = \bar{a}$ (= unit-acceleration) of the spaceship.

Once the units \bar{a} of acceleration and \bar{r} of length are fixed, the units \bar{t} of time and \bar{v} of velocity follow straightforward.

$$\left. \begin{aligned} \bar{t} &= \sqrt{\frac{\bar{r}}{\bar{a}}} \\ \bar{v} &= \sqrt{\bar{r}\bar{a}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Using these units makes K and a_0 vanish, wherever they occur as factors, e.g. in Eq. (9): $a \equiv \alpha$, in Eq. (11): $r = \sqrt{\varphi}$ and in Eq. (24): $v_c = r^{-1/2} = \varphi^{-1/4}$. Therefore, also in Eq. (7): $v = \beta v_c = \beta \varphi^{-1/4}$ and in Eq. (23): $t = (1/4) \int \gamma_r \varphi^{-5/4} d\varphi$.

In Table 1 some units, pertaining to the Earth, the Sun, the Moon and Mars, are listed for quick orientation. In all cases $\bar{a} = 1 \text{ cm/sec}^2$ was assumed.

For other values of \bar{a} , the pertinent units are readily determined, considering that, from Eq. (1)

$$\bar{r} \text{ is proportional to } \bar{a}^{-1/2}$$

and hence, from Eqs. (32)

$$\begin{aligned} \bar{t} &\text{ is proportional to } \bar{a}^{-3/4} \\ \bar{v} &\text{ is proportional to } \bar{a}^{+1/4}. \end{aligned}$$

Table 1. Units for $\bar{a} = 1 \text{ cm/sec}^2$

	Radii of Central Body	\bar{r}		\bar{v}	\bar{t}	
		Astr. Units	km	m/sec	hours	days
Earth	31.302	.001 335 5	199,660	1 413.0	39.250	1.6354
Sun	165.465	.769 82	115,090,000	33 925	942.36	39.265
Moon	12.739	.000 148 0	22,123	470.35	13.065	.5444
Mars	19.313	.000 437 9	65,469	809.13	22.476	.9365

IV. Some Specific Solutions

Going back to Eqs. (12) and introducing the notation (22), the basic equations can be written

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\beta_i + 4\varphi(d\beta_i/d\varphi)}{\gamma_r} \\ \alpha_r &= \frac{2\varphi[3\gamma_r - 4\varphi(d\gamma_r/d\varphi)]}{\gamma_r^3} - \frac{\beta_i^2 - 1}{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

The introduction of γ_r instead of β_r leads to a somewhat less simple form of the basic equations, especially as a result of γ_r appearing in the denominator of Eq. (22). The advantage, however, is that it considerably simplifies the integrations in Eqs. (23) and (29).

It was found that polynomial functions in φ for β_t and γ_r generally yield remarkably satisfactory results. Putting

$$\left. \begin{aligned} \beta_t &= T_0 + T_1\varphi + T_2\varphi^2 + T_3\varphi^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\varphi^n \\ \gamma_r &= R_0 + R_1\varphi + R_2\varphi^2 + R_3\varphi^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} R_n\varphi^n \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Eqs. (33) yield:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= \frac{T_0 + 5T_1\varphi + 9T_2\varphi^2 + \dots}{R_0 + R_1\varphi + R_2\varphi^2 + \dots} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (1+4n) T_n\varphi^n}{\sum_{n=0}^{\infty} R_n\varphi^n} \\ \alpha_r &= \frac{2\varphi(3R_0 - R_1\varphi - 5R_2\varphi^2 \dots)}{(R_0 + R_1\varphi + R_2\varphi^2 + \dots)^3} - \frac{(T_0 + T_1\varphi + T_2\varphi^2 + \dots)^2 - 1}{\varphi} \\ &= \frac{2\varphi \sum_{n=0}^{\infty} (3-4n) R_n\varphi^n}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} R_n\varphi^n \right]^3} - \frac{\left[\sum_{n=0}^{\infty} T_n\varphi^n \right]^2 - 1}{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

or, with

$$\left. \begin{aligned} \delta_t &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+4n) T_n\varphi^n \\ \delta_r &= \sum_{n=0}^{\infty} (3-4n) R_n\varphi^n \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Eqs. (35) are rewritten:

$$\alpha_t = \frac{\delta_t}{\gamma_r} \quad \alpha_r = \frac{2\varphi \delta_r}{\gamma_r^3} - \frac{\beta_t^2 - 1}{\varphi} \quad (37)$$

The following expressions for β_t and γ_r , found by trial and error, yield satisfactory results within the limits specified:

$$\left. \begin{aligned} \beta_t &= 1 + 2.5\varphi^2 - 9\varphi^3 \\ \gamma_r &= 1 + 21\varphi^2 - 100\varphi^3 \end{aligned} \right\} \quad \text{for } 0 < \varphi \leq .1$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_t &= .9929 + .231\varphi + .01\varphi^2 - .1\varphi^3 \\ \gamma_r &= .9925 + 1.14\varphi + .45\varphi^2 - \varphi^3 \end{aligned} \right\} \quad \text{for } .1 \leq \varphi \leq .5 \quad (38)$$

Naturally, it is required that at the transition point ($\varphi = .1$) both β_t and γ_r are continuous between the two ranges. Actually we find, from both expressions

$$\left. \begin{aligned} \beta_t (\varphi = .1) &= 1.016 \\ \gamma_r (\varphi = .1) &= 1.110 \end{aligned} \right\}. \quad (39)$$

From Eqs. (36) we have

$$\left. \begin{aligned} \delta_t &= 1 + 22.5\varphi^2 - 117\varphi^3 \\ \delta_r &= 3 - 105\varphi^2 + 900\varphi^3 \end{aligned} \right\} \quad \text{for } 0 < \varphi \leq .1$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_t &= .9929 + 1.155\varphi + .09\varphi^2 - 1.3\varphi^3 \\ \delta_r &= 2.9775 - 1.14\varphi - 2.25\varphi^2 + 9\varphi^3 \end{aligned} \right\} \quad \text{for } .1 \leq \varphi \leq .5. \quad (40)$$

Contrary to β_t and γ_r the δ -values must not necessarily be continuous. Discontinuity only indicates a discontinuous change in the thrust vector, represented by α . This is not a physical impossibility, like a sudden change in the velocity $\beta\varphi^{-1/4}$ would be. Nevertheless the solution presented above is selected as to be also continuous in δ and hence more realistic.

$$\left. \begin{aligned} \delta_t (\varphi = .1) &= 1.108 \\ \delta_r (\varphi = .1) &= 2.850 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Application of Eq. (23) then yields

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{4} \int (1 + 21\varphi^2 - 100\varphi^3) \varphi^{-5/4} d\varphi = -(1 - 3\varphi^2 + 9.0909 \dots \varphi^3) \varphi^{-1/4} \\ &\quad \text{for } 0 < \varphi \leq .1 \\ t &= -(.9925 - .38\varphi - .0642857 \dots \varphi^2 + .090909 \dots \varphi^3) \varphi^{-1/4} + \\ &\quad - .044711025 \dots \quad \text{for } .1 \leq \varphi \leq .5 \end{aligned} \right\}. \quad (42)$$

The addition of a constant in the second expression results from the requirement of a single value for t for $\varphi = .1$.

Eq. (29) yields:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{4} \int (1 + 23.5\varphi^2 - 109\varphi^3 + 52.5\varphi^4 - 439\varphi^5 + 900\varphi^6) \varphi^{-2} d\varphi = \\ &\quad = -.25\varphi^{-1} + 5.875\varphi - 13.625\varphi^2 + 4.375\varphi^3 - 27.4375\varphi^4 + \\ &\quad \quad + 45\varphi^5 \quad \text{for } 0 < \varphi \leq .1 \\ \Theta &= -.2463633125\varphi^{-1} + .340293375 \ln \varphi + .1800175\varphi - .1221\varphi^2 + \\ &\quad - .028375\varphi^3 - .0034375\varphi^4 + .005\varphi^5 + 1.18376674627 \\ &\quad \quad \text{for } .1 \leq \varphi \leq .5 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

the constant in the second expression again resulting from the requirement of continuity at $\varphi = .1$.

Table 2 shows a numerical evaluation of the presented expressions for β , α , r , t and Θ . Included also are values for $(\alpha_r \beta_t)/(\alpha_t \beta_r)$, to be compared with the values of $[(\alpha_r \beta_t)/(\alpha_t \beta_r)]_{opt}$, as computed from Eqs. (A 19) and (A 20) and using final differences as indicated in the Appendix. In addition, actual velocities $v = \beta v_c$ [Eq. (7)] are shown. An inspection of Table 2 shows that α varies well within $\pm 1\%$ of its nominal value (unity). The differences between the actual and the optimal values of $(\alpha_r \beta_t)/(\alpha_t \beta_r)$ seem to be more serious. They were found, however, to correspond to angles between the actual and the optimal thrust directions of 1.3° at most and hence to losses in the efficiency of the program in the order of $1/100$ of a percent as compared with the absolute optimum. A further discussion of the results follows in the next paragraphs.

Table 2. *Data of Escape Trajectory*

Ψ, φ	β_t	β_r	β	α_t	α_r	α
.01	1.0002	.0200	1.0004	1.0001	.0112	1.0002
.02	1.0009	.0397	1.0017	1.0005	.0231	1.0007
.04	1.0034	.0779	1.0064	1.0013	.0418	1.0021
.06	1.0071	.1139	1.0135	1.0016	.0526	1.0030
.08	1.0114	.1477	1.0221	1.0008	.0647	1.0029
.10	1.0160	.1802	1.0319	.9982	.0942	1.0026
.15	1.0274	.2564	1.0589	.9945	.1507	1.0058
.20	1.0387	.3251	1.0884	.9891	.1919	1.0076
.25	1.0497	.3876	1.1190	.9821	.2195	1.0064
.30	1.0604	.4451	1.1500	.9736	.2407	1.0029
.35	1.0707	.4987	1.1811	.9634	.2622	.9985
.40	1.0805	.5493	1.2121	.9517	.2901	.9949
.45	1.0898	.5978	1.2430	.9382	.3293	.9943
1 .50	1.0984	.6452	1.2739	.9228	.3846	.9998
.9	1.1168	.7512	1.3459	.9008	.4498	1.0069
.8	1.1388	.8872	1.4436	.8628	.5205	1.0077
.7	1.1644	1.0655	1.5784	.8082	.5969	1.0048
.6	1.1936	1.3069	1.7699	.7366	.6773	1.0007
.5	1.2264	1.6478	2.0541	.6477	.7581	.9972
.4	1.2628	2.1605	2.5025	.5422	.8346	.9952
.3	1.3028	3.0127	3.2824	.4213	.9014	.9950
.2	1.3464	4.7053	4.8941	.2876	.9538	.9962
.1	1.3936	9.7387	9.8379	.1453	.9878	.9984

Ψ, φ	r	t	Θ	$\frac{\alpha_r \beta_t}{\alpha_t \beta_r}$	$\left(\frac{\alpha_r \beta_t}{\alpha_t \beta_r} \right)_{opt}$	$v = \beta v_c$
.01	.1000	-3.1614	-24.9426	.5634	.5003	3.1637
.02	.1414	-2.6562	-12.3880	.5822	.5013	2.6637
.04	.2000	-2.2266	-6.0366	.5378	.5041	2.2505
.06	.2449	-2.0027	-3.8626	.4646	.5070	2.0477
.08	.2828	-1.8530	-2.7409	.4424	.5139	1.9219
.10	.3162	-1.7411	-2.0467	.5322	.5327	1.8349
.15	.3873	-1.5461	-1.0801	.6074	.5439	
.20	.4472	-1.4124	- .5648	.6201	.5588	1.6275
.25	.5000	-1.3103	- .2365	.6054	.5712	1.5825
.30	.5477	-1.2272	- .0049	.5889	.5852	1.5539
.35	.5916	-1.1570	+ .1694	.5844	.6059	1.5356
.40	.6325	-1.0960	+ .3067	.5996	.6369	1.5241
.45	.6708	-1.0419	+ .4182	.6399	.6774	1.5176
1 .50	.7071	- .9935	+ .5110	.7095	.7193	1.5149
.9				.7424	.6722	
.8	.8839	- .7864	+ .8415	.7744	.7374	1.5355
.7	1.0102	- .6603	+ .9998	.8071	.7760	1.5704
.6	1.1785	- .5115	+ 1.1539	.8398	.8177	1.6304
.5	1.4142	- .3294	+ 1.3044	.8711	.8516	1.7273
.4	1.7678	- .0945	+ 1.4518	.8997	.8969	1.8822
.3	2.3570	+ .2340	+ 1.5969	.9253	.9416	2.1380
.2	3.5355	+ .7619	+ 1.7404	.9490	.9652	2.6028
.1	7.0711	+ 1.9085	+ 1.8834	.9730	.9877	3.6996

It would have been increasingly difficult to devise further expressions for β_i and γ_r as functions of φ , to be used for $\varphi > .5$, and to be valid over a range of reasonable extent. A more adequate approach is the replacement of φ by a new variable ψ , related to φ by

$$\varphi = \frac{1}{2\psi^2} \quad (44)$$

and hence decreasing with increasing r .

Since then

$$d\varphi = -\frac{d\psi}{\psi^3} \quad (45)$$

Eqs. (12) can be rewritten

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \left(\beta_i - 2\psi \frac{d\beta_i}{d\psi} \right) \psi^2 \beta_r \\ \alpha_r &= \left(-\beta_r - 2\psi \frac{d\beta_r}{d\psi} \right) \psi^2 \beta_r - 2\psi^2(\beta_i^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

In addition we define, analogous to Eq. (22):

$$\beta_r = \frac{1}{\psi \varepsilon_r} \quad (47)$$

yielding

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\psi [\beta_i - 2\psi(d\beta_i/d\psi)]}{\varepsilon_r} \\ \alpha_r &= \frac{\varepsilon_r + 2\psi(d\varepsilon_r/d\psi)}{\varepsilon_r^3} - 2\psi^2(\beta_i^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Equivalent expressions for Eqs. (11), (24), (23) and (29) are

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\varphi}} = \sqrt{\frac{K}{2a_0}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (49)$$

$$v_c = \sqrt{\frac{K}{r}} = \sqrt[4]{2a_0 K} \psi^{1/2} \quad (50)$$

$$t = -\sqrt[4]{\frac{K}{8a_0^3}} \int \frac{d\psi}{\beta_r \psi^{5/2}} = -\sqrt[4]{\frac{K}{8a_0^3}} \int \varepsilon_r \psi^{-3/2} d\psi \quad (51)$$

$$\Theta = -\int \frac{\beta_i}{\beta_r} \left(\frac{d\psi}{\psi} \right) = -\int \beta_i \varepsilon_r d\psi \quad (52)$$

and for Eqs. (34), (36) and (37):

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= \sum_{m=0}^{\infty} T_m \psi^m \\ \varepsilon_r &= \sum_{m=0}^{\infty} R_m \psi^m \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_t &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 - 2m) T_m \psi^m \\ \zeta_r &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 + 2m) R_m \psi^m \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= \frac{\psi \zeta_t}{\varepsilon_r} \\ \alpha_r &= \frac{\zeta_r}{\varepsilon_r^3} - 2\psi^2(\beta_t^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Inspection of these expressions in ψ instead of φ reveals first [Eq. (49)] that ψ approaches zero for r going to infinity. For $\psi \rightarrow 0$ we find $\beta_t \rightarrow T_0$, $\zeta_t \rightarrow T_0$, $\varepsilon_r \rightarrow R_0$ and $\zeta_r \rightarrow R_0$ and

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t (\psi = 0) &\rightarrow 0 \\ \alpha_r (\psi = 0) &\rightarrow \frac{1}{R_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Since $\alpha = (\alpha_t^2 + \alpha_r^2)^{1/2}$ must always be about unity, it follows

$$R_0 = 1. \quad (57)$$

Finally we have, with Eq. (47) and the first Eq. (55)

$$\frac{\alpha_t \beta_t}{\alpha_t \beta_r} = \frac{\psi \varepsilon_r \alpha_r \beta_t}{\alpha_t \varepsilon_r^2 \alpha_r \zeta_t} \quad (58)$$

and this expression is clearly found to approach unity for $\psi \rightarrow 0$ as required (see Appendix), independent of the value of T_0 . This indicates that T_0 , in contrast to R_0 , may very well be unequal to unity.

The expressions for β_t and ε_r naturally must be continuous with β_t and γ_r from Eqs. (38) for $\varphi = .5$. This transition point $\varphi = .5$ hence $\psi = 1$, is especially convenient, since there $2\varphi = 1$ also, so that Eqs. (37) and (55) are identical at this point, if δ is replaced by ζ and γ_r by ε_r . Again, the functions for β_t and ε_r were selected in such a way that also ζ_t and ζ_r , for $\psi = 1$, were continuous with δ_t and δ_r for $\varphi = .5$.

The following expressions proved quite satisfactory

$$\left. \begin{aligned} \beta_t &= 1.4444 - .526\psi + .18\psi^2 \\ \varepsilon_r &= 1 + .22\psi + .50\psi^2 - .17\psi^3 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

hence, from Eqs. (54)

$$\left. \begin{aligned} \zeta_t &= 1.4444 + .526\psi - .54\psi^2 \\ \zeta_r &= 1 + .66\psi + 2.50\psi^2 - 1.19\psi^3 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

For $\psi = 1$ we find:

$$\left. \begin{aligned} \beta_t (\psi = 1) &= 1.0984 \\ \varepsilon_r (\psi = 1) &= 1.55 \\ \zeta_t (\psi = 1) &= 1.4304 \\ \zeta_r (\psi = 1) &= 2.97 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

completely in agreement with the values of β_t , γ_r , δ_t and δ_r from Eqs. (38) and (40) for $\varphi = .5$.

Expressions for r , t and Θ from Eqs. (49) thru (52) and using Eq. (59) are

$$r = \frac{1}{\psi \sqrt{2}} \quad (62)$$

$$t = (\sqrt[4]{2} \cdot \psi^{1/2}) \left(\frac{1}{\psi} - .22 - .16666 \dots \psi + .034 \psi^2 \right) - 1.763 \, 264 \, 59 \quad (63)$$

where

$$(\sqrt[4]{2} \cdot \psi^{1/2}) = v_c \quad (50, \text{ref.})$$

and finally

$$\begin{aligned} \Theta &= - \int (1.4444 - .526 \psi + .18 \psi^2) (1 + .22 \psi + .50 \psi^2 - .17 \psi^3) d\psi = \\ &= -1.4444 \psi + .104 \, 116 \psi^2 - .262 \, 16 \psi^3 + .117 \, 237 \psi^4 + \\ &\quad - .035 \, 884 \psi^5 + .0051 \psi^6 + 2.027 \, 036. \end{aligned} \quad (64)$$

Table 2 shows the evaluation, also of this part of the trajectory. It can be seen that the solution in terms of ψ is of comparable quality as the part, expressed in terms of φ , that is, within $\pm 1\%$ as far as the magnitude of the thrust is concerned and within 1/100 of a percent with respect to optimal efficiency.

Inspection of Table 2 reveals some further items that are worth mentioning.

Escape-velocity is reached for $\beta = \sqrt[4]{2}$ (escape-velocity equals $\sqrt[4]{2}$ times circular velocity). Apparently this condition is reached at $r = .8551$, $t = -.8173$ and $\Theta = +.7981$. This result is significant if projected against the approximation, shown before under "General Solution". It was shown there that, with a nominal acceleration of $a_0 = 1 \text{ cm/sec}^2$ ($\approx .001 \text{ g}$), it would take 8.51 days to escape, starting from an orbit where $v_c = 7350 \text{ m/sec}$, and it was suggested that this estimate was low. From Table 2 it becomes clear that actually the estimate was high, due to the assumption $v_c = 0$ for the end of the maneuver. Apparently the time to escape velocity is $.8173 \times 1.6354 = 1.34$ days shorter than calculated before, hence 7.17 days. After the full 8.51 days ($t = 0$ in Table 2) the velocity has increased considerably in excess of escape velocity. No characteristic conditions stand out in this range. It can be stated, however, that the expression $v_{c,0}/a_0$, as used before, constitutes a rather usable rough approximation for the time required for what practically could be labeled "escape", including some overspeed.

The number of required revolutions, as computed earlier, turns out to be low indeed. According to Table 2 the angle Θ passes the zero value already before escape velocity is reached. Here the important item is, however, the direction in which the final escape will take place.

In contrast to t , approaching infinity for $r \rightarrow \infty$ ($\psi \rightarrow 0$), Θ never exceeds a finite positive value, namely the integration constant 2.027 of Eq. (64). This value indicates the escape direction. Hence the number of revolutions, computed before (29.1), should be increased by about 1/3 of a revolution.

No attempt has been made to generalize the results obtained, in a more accurate way. The reason for this is that the solution presented is by no means specifically optimal. Its efficiency is probably about 99.99%, but it is just a member of a big family of solutions, all of them almost optimal but differing appreciably in other characteristics. So, for instance, due to the fluctuations in α , the time at which escape velocity is reached is suspected to differ up to .01 in various solutions. And the escape direction might even vary several degrees, depending upon the exact programming of both magnitude and direction of thrust, all within the same limits of efficiency.

One relation, however, can be expected to be rather invariant for the different solutions, namely the one expressing the efficiency. In other words the relation between the characteristic velocity $\int \alpha dt$ and the energy level E is likely to be almost invariant for all almost optimal solutions.

V. The Required Characteristic Velocity

The energy level E has been defined in the appendix and is shown to be

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{K}{r}. \quad (\text{A } 10, \text{ ref.})$$

Using Eqs. (6) and (7), Eq. (A 10) can be rewritten

$$2E = (\beta^2 - 2) v_e^2 = V^2 \quad (65)$$

where V is the end velocity in infinity, associated with any instantaneous condition, if no thrust is applied from then on. From Eqs. (50) and (65) we find:

$$V^2 = (\beta^2 - 2) \psi / 2. \quad (66)$$

Values of V^2 are readily computed from the data presented in Table 2.

The other parameter, the characteristic velocity $\int \alpha dt$, is not easily determined with accuracy, due to the intricate form in which α appears. A numerical integration was therefore performed of the difference between the actual α and unity, extending through the whole range $0 < \varphi < .5$ and $1 > \psi > 0$.

The results are shown in Table 3, only for the range $1 > \psi > 0$, since this is the range where the relation between energy level and characteristic velocity is of major importance.

An effort was made to approximate the relation between V^2 and $\int \alpha dt$ by a simple analytic expression, since it was felt that this relation is generally valid for almost optimal solutions. The following expression proved quite satisfactory:

$$\int \alpha dt \approx \sqrt{V^2 + \frac{2.1 - .05 V^2}{2.3 + V^2}} - 1.7676. \quad (67)$$

Eq. (67) is also evaluated in Table 3. The deviation of Eq. (67), in the range of real values of V , is shown to be less than .005 and errors of this magnitude seem possible anyway in the numerical evaluation of the relation between V^2 and $\int \alpha dt$, due to the inaccuracy in the integration and fluctuations in the thrust direction. However, Eq. (67) seems to permit the determination of the required characteristic velocity for an escape maneuver from the earth's gravitational field with an accuracy of about ± 10 m/sec.

Table 3. Relations between Energy Level and Characteristic Velocity

ψ	V^2	$\int \alpha dt$	$\int \alpha dt$ [Eq. (67)]	$\Delta(\int \alpha dt)$
1.0	— .5336	— .9890		
.9	— .2398	— .8913	— .8814	+ .0099
.8	+ .0950	— .7808	— .7828	— .0020
.7	+ .4863	— .6539	— .6580	— .0041
.6	+ .9611	— .5047	— .5065	— .0018
.5	+ 1.5693	— .3228	— .3213	+ .0015
.4	+ 2.4113	— .0888	— .0849	+ .0039
.3	+ 3.7225	+ .2381	+ .2424	+ .0043
.2	+ 6.2090	+ .7636	+ .7660	+ .0024
.1	+ 13.4046	+ 1.9071	+ 1.9060	— .0011

So far only the upper limit of $\int \alpha dt$, pertaining to the end of a considered escape maneuver, was considered. Introducing the lower limit meets with some special difficulties. Assuming that the escape maneuver starts from a circular orbit, where $\beta_r = 0$, it is noted that the solution, presented in the previous paragraph, does not include any point where $\beta_r = 0$. Moreover, the basic approach, using polynomial expressions for β_t and γ , [Eqs. (34)], does not permit the defining of trajectories involving vanishing or reversals of β_r . Expressions for β_r , however, including functions like $(\varphi - \varphi_a)^{1/2}$ (where φ_a corresponds to the distance r where $\beta_r = 0$) can yield workable solutions for such cases.

In Refs. [9] and [10] solutions of this kind have been dealt with. Further investigation is in progress. Meanwhile, the following qualitative approach yields some indications on the relation between characteristic velocity and energy level.

First consider the case of free coasting around an attracting body. It is well known from KEPLER's Laws that the orbit is generally an ellipse and characterized by a regular fluctuation of the tangential and radial components of the velocity vector and of the length of the radius vector, with a period equaling one revolution. The circular orbit is the special case, where these fluctuations vanish.

The escape trajectory is distinct from the before-mentioned (closed) orbit in as much as the gradual supply of energy by the rocket thrust monotonously increases the energy level of the instantaneous orbit. But since zero-thrust generally gives rise to fluctuating location and velocity characteristics, it seems reasonable to expect that the gradual supply of energy will generally result in fluctuating changes in these characteristics as well. The case dealt with in the preceding paragraph and showing no such fluctuations, is therefore to be considered as a special case, comparable to the circular orbit for zero-thrust.

Preliminary investigation indicates that such fluctuating trajectories may be defined by introducing terms involving trigonometric functions of (C/φ) in the expressions for β , at least as long as the fluctuations are small. As in the zero-thrust case, the period seems to be of the order of one revolution (hence variable in terms of time).

The trajectory shown in the previous paragraph merges backwards into an ellipse, rather than into a circle, due to the fact that β_r is nowhere zero. Inversely an escape trajectory, to merge at any place into a circle, must necessarily be of the fluctuating type. The specific values of the velocity-vector and of the radius-vector at any moment may be considerably different from those computed before. However, the characteristic velocity *increment* over a long period of time will be a much more invariant function of the corresponding energy *increment* and hence can be calculated with satisfactory accuracy from the data, obtainable from the non-fluctuating solution.

The reason for this assumption follows. Since, with constant thrust, the energy level appears as the time integral of the (effective) velocity [Eq. (A 12)], the fluctuations in the energy will be considerably smaller than those in the velocity. Hence, it can be expected that, especially "in the long run" (i.e. if the trajectory covers considerably more than one revolution) the relation between the characteristic velocity (time integral of the thrust) and the energy level (time integral of the velocity) will be only slightly effected by these fluctuations.

It may be noted that the fluctuating trajectory is not the only possible escape trajectory, starting from a circular orbit. Another solution lies in the establishing of a transition between the circular orbit and the non-fluctuating trajectory in a limited period of time. This transition must depart from either or both of the

requirements of Eqs. (19). It therefore always involves a loss in time, though not necessarily in efficiency. It is felt that the analytically more intricate fluctuating trajectory is more appropriate for escape-maneuvers, where inaccuracy of prediction is readily corrected by astronomical observation. On reentry-maneuvers, however, where accurate heading for a specific target (for instance a space station) will frequently be of major importance, the simplicity of the non-fluctuating and transition trajectories may easily outweigh the little additional time expenditure. Some transition trajectories will be dealt with in a subsequent paper.

Investigation in progress has indicated thus far that for values of a_0 , smaller than about .05 times the acceleration, of gravity in the starting circular orbit, Eq. (26) with $\gamma \equiv 1$ yields satisfactorily accurate results:

$$\int \alpha dt = - \int dv_c = -v_c. \quad (68)$$

This Eq. (68) actually determines the lower boundary value of $\int \alpha dt$ and must be considered in connection with the upper boundary value of Eq. (67). The result is a total required characteristic velocity increment v_i , determined by

$$v_i = v_c + \sqrt{V^2 + \frac{2.1 - .05 V^2}{2.3 + V^2}} - 1.7676 \quad (69)$$

where V , the required end-velocity in infinity, can have any real value, while v_c , the initial circular velocity, should be at least somewhat over 2, in accordance with the limitations on a_0 , mentioned just before. Under these conditions Eq. (69) is believed to be accurate within $\pm .01$, i.e. well within $\pm 1\%$ or better.

VI. Comparison with High Acceleration Trajectories

It is of interest to compare the result, expressed in Eq. (69), with the characteristic velocity required when the total energy is supplied instantaneously at the beginning of the maneuver, involving naturally a very high acceleration. From Eq. (65), and considering that after that first impulse the energy level does not change any more, it is clear that such a maneuver involves the increase of the original velocity v_c to a value v_p , defined by

$$v_p^2 - 2v_c^2 = V^2,$$

hence

$$v_p = \sqrt{2v_c^2 + V^2}.$$

The required characteristic velocity increment equals in this case the actual velocity increment (since the gravity does not effect the energy level during the short heavy impulse). Hence,

$$v_i^* = \sqrt{2v_c^2 + V^2} - v_c \quad (70)$$

where v_i^* is the characteristic velocity increment for the instantaneous heavy impulse.

An approximate comparison of Eqs. (69) and (70) can be established by rewriting first Eq. (69) in a simpler form

$$v_i = v_c + V - A \quad (71)$$

where A is a variable almost exclusively dependent on V . A numerical check shows that $A \approx 1.76$ and does not change much for high values of V . For $V < 4$ it gradually decreases, reaching 1.70 for $V = 2$ and .81 for $V = 0$.

Denoting by R the ratio of the characteristic velocity increments involved, we find, using Eqs. (70) and (71):

$$R = \frac{v_i}{v_i^*} = \frac{v_c + V - A}{\sqrt{2v_c^2 + V^2 - v_c}}. \quad (72)$$

Furthermore introducing the symbol B for:

$$B = \frac{V}{v_c} \quad (73)$$

Eq. (72) can be rewritten:

$$R = \frac{1 + B - A/v_c}{\sqrt{2 + B^2 - 1}}. \quad (74)$$

The limit case of infinitely low acceleration involves $v_c \rightarrow \infty$. This is true because v_c is expressed in the unit velocity \bar{v} , which is the circular velocity at the distance \bar{r} , where gravity acceleration equals rocket acceleration $a_0 = \bar{a}$. For $\bar{a} \rightarrow 0$ we therefore have $\bar{r} \rightarrow \infty$ and $\bar{v} \rightarrow 0$.

In this limit case $A/v_c \rightarrow 0$ and Eq. (74) becomes

$$R = \frac{1 + B}{\sqrt{2 + B^2 - 1}}. \quad (75)$$

Simple procedures show that, from Eq. (75)

$$R_{max} = 3 \quad \text{for} \quad B = .5. \quad (76)$$

Clearly R_{max} is smaller than 3 for any value of $v_c > 0$ i.e. $a_0 > 0$.

Numerical evaluation of Eq. (74) for reasonable values of B and v_c , for instance, corresponding to $a_0/g_0 > .0001$ ($a_0 > .07$ cm/sec²) shows that R generally does not surpass the value of 2.7. Taking into account that, on the other hand, an instantaneous acceleration is never really instantaneous, it might be stated that the penalty involved in extremely low acceleration propulsion, as compared with high acceleration, is of the order of a factor 2.5 or less, as far as characteristic velocity is concerned. This statement seems to be rather general and not to be confined to specific maneuvers (except of course maneuvers starting or ending at *surfaces* of heavy celestial bodies, excluded at the outset in the present investigation).

VII. Final Remarks

The last two paragraphs contained an elaboration on a set of specific solutions of the general equations, presented before. Some of the conclusions had to be formulated in rather vague terms, since the characteristics of a single trajectory cannot give all the answers pertinent to the escape maneuver at low acceleration. Further investigation in this field must involve the introduction of other *kinds* of functions for β_t and β_r , as indicated in connection with the merging into a circular orbit. In addition, however, various specific solutions must be tried out numerically in order to check their adequacy (economy in fuel and time). This further development constitutes a rather elaborate enterprise. It certainly *can* be done, even with a desk-calculator, as it has been done for the present specific solution.

A more attractive way of continuing the research along the indicated line is by the use of high speed computing equipment. Once the set of operations involved is programmed, the computations of individual cases (complete sets of Tables 2 and 3) might be a matter of minutes or even seconds. In this way considerable experience on the effect of changing coefficients in the expressions

for β_t and β_r can be accumulated in an extremely short time and probably at relatively low cost. This research could lead to a systematic catalogue of significant solutions for different purposes. While just one optimal solution exists, a great number of alternate trajectories, especially those merging into the optimal solution over a longer or shorter interval of time, either backward or forward, should be collected.

With such a catalogue in existence it would be possible to find good approximations of satisfactory solutions for any maneuver, determined by the observed position at zero time and the target position at target time, just by interpolation between computed solutions. Naturally this interpolation would be a multi-dimensional one and the final solutions to be adopted would have to be checked and corrected until satisfactory.

In this case, however, the checking procedure would involve *only the two boundary conditions and only the expressions for β_r , β_t , Θ and t* . Once these conditions are satisfied and the final expressions for β_r and β_t fall within the range, shown in the catalogue, the feasibility and the economy of the solution are guaranteed. From then on consecutive computations can be made to direct the actual control of the ship and to check the consecutive observations. But it is not necessary, in this case, to analyze the whole trajectory completely and accurately right away, *before knowing at all whether or not it leads to the contemplated target*.

Basically, the compilation of a catalogue, as suggested here, could be performed also by a step by step procedure. This procedure may even prove very useful in scanning the field. When it comes, however, to final formulations, the present solution has the advantage of absolute accuracy, of *offering the only way to check starting and finishing conditions first* (also to any desired degree of accuracy) and, hence, of being *straightforward*.

Under the heading "General Approach" it was stated that the method to be presented had one disadvantage: that it was not straightforward. In the light of these final considerations, specifically in connection with a catalogue of solutions, we will have to reconsider this statement thoroughly.

Appendix

Optimization of an Escape Trajectory with Respect to the Required Characteristic Velocity

In Eq. (5) rewritten below

$$\begin{aligned} a_t &= \left(\frac{dv_t}{dr} + \frac{v_t}{r} \right) v_r \\ a_r &= \frac{dv_r}{dr} v_r - \frac{v_t^2}{r} + \frac{K}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A } 1)$$

it is assumed that $v_r = v_r(r)$ is not changed and that $v_t = v_t(r)$ is changed such, that $a = (a_t^2 + a_r^2)^{1/2} = a(r)$ remains unchanged. First we then have:

$$\begin{aligned} \Delta(a^2) &= 0 = \Delta(a_t^2) + \Delta(a_r^2) = 2 a_t \cdot \Delta a_t + 2 a_r \cdot \Delta a_r \\ \Delta a_t &= - \frac{a_r}{a_t} \cdot \Delta a_r \end{aligned} \quad (\text{A } 2)$$

From the second Eq. (A 1) we have

$$\Delta a_r = - \frac{2 v_t}{r} \cdot \Delta v_t \quad (\text{A } 3)$$

and hence, from Eqs. (A 2) and (A 3)

$$\Delta a_t = \frac{2 a_r v_t}{r a_t} \cdot \Delta v_t. \quad (\text{A } 4)$$

The first Eq. (A 1) yields:

$$\Delta a_t = \frac{v_r}{r} \cdot \Delta v_t + v_r \cdot \Delta \left(\frac{dv_t}{dr} \right). \quad (\text{A } 5)$$

Equalizing Eqs. (A 4) and (A 5) yields, after multiplication with (r/v_r) :

$$\left(r \frac{a_r v_t}{a_t v_r} - 1 \right) \Delta v_t = r \cdot \Delta \left(\frac{dv_t}{dr} \right). \quad (\text{A } 6)$$

Now, since an escape maneuver is primarily concerned with raising the energy level, optimization is reached for the highest possible values of dE/dt , either for any value of t or for any value of E . The energy E can be determined from:

$$\frac{dE}{dt} = a_t v_t + a_r v_r. \quad (\text{A } 7)$$

Using Eqs. (5) we find:

$$\frac{dE}{dt} = \left[\frac{1}{2} \frac{d(v_t^2)}{dr} + \frac{v_t^2}{r} \right] v_r + \left[\frac{1}{2} \frac{d(v_r^2)}{dr} - \frac{v_r^2}{r} + \frac{K}{r^2} \right] v_r = \left[\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dr} + \frac{K}{r^2} \right] v_r. \quad (\text{A } 8)$$

Remembering that, from Eq. (4), $v_r = dr/dt$ we have

$$dE = \frac{1}{2} d(v^2) + \frac{K}{r^2} dr = d \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{K}{r} \right) \quad (\text{A } 9)$$

or

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{K}{r} + \text{Const.}$$

Escape velocity is defined as the limit velocity, at which infinity can be reached. Associating escape velocity with the energy level zero we find that for $r = \infty$, $v = 0$ and $E = 0$ also $C = 0$. Hence:

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{K}{r} \quad (\text{A } 10)$$

a well-known expression.

We now introduce the concept of "effective velocity" v_e , defined by

$$v_e = v \cos \gamma \quad (\text{A } 11)$$

where γ is the angle between the thrust and the velocity vectors.

From Eq. (A 7) we then have:

$$\frac{dE}{dt} = a v_e. \quad (\text{A } 12)$$

And, since a is to be considered a constant the condition for the optimal trajectory, expressed before as a relation between dE/dt and E , can now be defined as the condition for which the relation between v_e and E is not effected by the change Δv_t of v_t . Mathematically this can be expressed as follows:

$$\frac{\Delta v_e}{\Delta E} = \frac{dv_e}{dE} \quad (\text{A } 13)$$

where the left-hand member refers to changes, caused by Δv_t , whereas the right-hand member is associated with the relationship within a given trajectory.

Using Eqs. (A 12) and (A 8) we find:

$$\Delta v_e = \frac{1}{a} \cdot \Delta \left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{1}{a} \cdot \Delta \left[\frac{d(v_t^2/2)}{dt} \right] = \frac{1}{a} \cdot \Delta \left(\frac{v_t dv_t}{dt} \right) \quad (\text{A } 14)$$

while Eq. (A 10) yields:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta(v_t^2) = v_t \cdot \Delta v_t. \quad (\text{A } 15)$$

Finally dv_e/dE can be developed into

$$\frac{dv_e}{dE} = \left(\frac{dv_e}{dr} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{dt}{dE} \right)$$

and using Eqs. (4) and (A 12)

$$\frac{dv_e}{dE} = \left(\frac{dv_e}{dr} \right) v_r \left(\frac{1}{a v_e} \right) = \left(\frac{v_r}{a} \right) \frac{d(\ln v_e)}{dr}. \quad (\text{A } 16)$$

With Eqs. (A 14), (A 15) and (A 16) substituted into Eq. (A 13) we find

$$\Delta \left(\frac{v_t dv_t}{dt} \right) = v_r \frac{d(\ln v_e)}{dr} v_t \cdot \Delta v_t.$$

Dividing by the (unchanged) quantity $v_r = dr/dt$ we get

$$\begin{aligned} \Delta \left(v_t \frac{dv_t}{dr} \right) &= v_t \frac{d(\ln v_e)}{dr} \cdot \Delta v_t \\ v_t \cdot \Delta \left(\frac{dv_t}{dr} \right) &= \left[v_t \frac{d(\ln v_e)}{dr} - \frac{dv_t}{dr} \right] \cdot \Delta v_t \\ \Delta \left(\frac{dv_t}{dr} \right) &= \left[\frac{d(\ln v_e)}{dr} - \frac{d(\ln v_t)}{dr} \right] \cdot \Delta v_t = \left[\frac{d}{dr} \ln \left(\frac{v_e}{v_t} \right) \right] \cdot \Delta v_t \end{aligned} \quad (\text{A } 17)$$

Eq. (A 17) is now used in Eq. (A 6):

$$\begin{aligned} 2 \frac{a_r v_t}{a_t v_r} &= 1 + \left(\frac{r}{\Delta v_t} \right) \cdot \Delta \left(\frac{dv_t}{dr} \right) = 1 + r \left[\frac{d}{dr} \ln \left(\frac{v_e}{v_t} \right) \right] = 1 + \frac{d[\ln(v_e/v_t)]}{d[(\ln r)]} \\ \frac{a_r v_t}{a_t v_r} &= \frac{1}{2} + \frac{d[\ln(v_e/v_t)]}{d[(\ln r^2)]} = \left(\frac{a_r v_t}{a_t v_r} \right)_{opt} \end{aligned} \quad (\text{A } 18)$$

Eq. (A 18) permits the checking, afterwards, of an assumed trajectory with respect to maximum economy.

It might be argued that, so far, only the variation of v_t was considered, whereas v_r was assumed unchanged. However, once $v_r = v_r(r)$ is fixed, $v_t = v_t(r)$ is uniquely determined by *either* of two conditions: by $\alpha = 1 = \text{constant}$ or by Eq. (A 18). If it is possible to satisfy *both* conditions at the time, it indicates that the assumed function $v_r = v_r(r)$ was the optimal one. Likewise, the *approximate* satisfying of both conditions indicates that the solution under consideration is very close to optimal.

Since v_e is generally nearly equal to the actual velocity v , the ratio v_e/v_t is apt to increase gradually with increasing r . Consequently, $[(a_r v_t)/(a_t v_r)]_{opt}$ will be greater than $\frac{1}{2}$. Numerical investigation shows that only for values of φ greater than .1 is there an appreciable departure of $[(a_r v_t)/(a_t v_r)]_{opt}$ from $\frac{1}{2}$.

For numerical evaluation Eq. (A 18) is more conveniently written:

$$\left(\frac{\alpha_r \beta_t}{\alpha_t \beta_r} \right)_{opt} = \frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\beta_e/\beta_t} \left[\frac{d(\beta_e/\beta_t)}{d\varphi} \right] \quad (\text{A } 19)$$

where, using Eqs. (A 11), (A 12) and (A 7)

$$\beta_e/\beta_t = \frac{\beta \cos \gamma}{\beta_t} = \frac{\alpha_t \beta_t + \alpha_r \beta_r}{\alpha \beta_t}. \quad (\text{A } 20)$$

Differentiation of this expression is of course possible but it leads to rather lengthy developments. Since extreme accuracy in the determination of $[(\alpha_r \beta_t)/(\alpha_t \beta_r)]_{opt}$ is of little value it seems much more adequate to determine $d(\beta_e/\beta_t)/d\varphi$ from $\Delta(\beta_e/\beta_t)/\Delta\varphi$ where the latter values are readily obtained from a table of the type of Table 2.

For high values of φ Eq. (A 19) can be transformed again, using ψ instead of φ . With Eqs. (44) and (45) we find:

$$\left(\frac{\alpha_r \beta_t}{\alpha_t \beta_r}\right)_{opt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\psi}{\beta_e/\beta_t} \left[\frac{d(\beta_e/\beta_t)}{d\psi} \right]$$

and, since β_e/β_t approaches infinity for ψ approaching zero, $(\beta_e/\beta_t)^{-1}$ seems more appropriate:

$$\left(\frac{\alpha_r \beta_t}{\alpha_t \beta_r}\right)_{opt} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\psi}{\beta_t/\beta_e} \left[\frac{d(\beta_t/\beta_e)}{d\psi} \right]. \quad (\text{A } 21)$$

Eq. (A 21) can be evaluated in much the same way as Eq. (A 19). It should be noted that, from Eqs. (47), (53) and (57), β_r approaches ψ^{-1} for low values of ψ . Since β_t at the same time approaches a finite value (T_0), β_e also approaches ψ^{-1} . From these considerations we find that both ψ and β_t/β_e approach zero linearly and hence:

$$\frac{\psi}{\beta_t/\beta_e} \rightarrow \frac{d\psi}{d(\beta_t/\beta_e)} \quad \text{for} \quad \psi \rightarrow 0$$

yielding, from Eq. (A 21):

$$\left(\frac{\alpha_r \beta_t}{\alpha_t \beta_r}\right)_{\psi=0} = 1$$

as was to be expected. At great distances from the attracting body the optimal thrust direction is obviously tangential to the trajectory.

Some further considerations pertaining to optimization are presented under the heading "Characteristic Velocity" in the body of the paper.

References

1. H. OBERTH, *Wege zur Raumschiffahrt*, S. 409. München: R. Oldenbourg, 1928.
2. W. VON BRAUN, *Das Marsprojekt*. Frankfurt a. M.: Umschau-Verlag, 1952.
3. H. HABER, *The Problem of Weightlessness in Present and Future Aviation*, read before the Institute of the Aeronautical Sciences, Los Angeles, May 19, 1955.
4. Private communication of H. HABER to the author, Nov. 5, 1955.
5. G. F. FORBES, *The Trajectory of a Powered Rocket in Space*. J. Brit. Interplan. Soc. **9**, 75 (1950).
6. H. PRESTON-THOMAS, *Generalized Interplanetary Orbits*. J. Brit. Interplan. Soc. **11**, 76 (1952).
7. H. S. TSIEN, *Take-Off from Satellite Orbit*. J. Amer. Rocket Soc. **23**, 233 (1953).
8. D. F. LAWREN, *Optimal Programming of Rocket Thrust Direction*. Astronaut. Acta **1**, 41 (1955).
9. H. F. MICHELSEN, *Die Bahnbestimmung einer schwachbeschleunigten Rakete in einem zentralen Gravitationsfeld* (unpublished).
10. H. F. MICHELSEN in: *Probleme aus der Astronautischen Grundlagenforschung*, herausgegeben von H. H. KÖLLE, S. 174. Stuttgart-Zuffenhausen: Ges. f. Welt-raumforschung, 1952.

Beitrag zur Theorie der Wasserdampf Rakete¹

Von

H. Bednarczyk², ÖGfW

(Mit 4 Abbildungen und 4 Tafeln)

(Eingegangen am 6. Juli 1956)

Zusammenfassung. Die thermodynamischen Vorgänge in einer Wasserdampf Rakete werden analysiert und es werden Gleichungen zur Dimensionierung von Wasserdampf Raketen hergeleitet. Es werden behandelt: Das Ausströmen des heißen Wassers aus dem Speicher (Zusammenhang zwischen Speicherdruck und Speicherfüllung), eine Maßnahme gegen den störenden Siedeverzug bei der Expansion in der Schubdüse, die Berechnung der LAVAL-Zustände in der Düse und damit die Berechnung des Schubes und die Frage der Düsenanpassung. Es wurde getrachtet, die Gleichungen auf eine Form zu bringen, die nur bereits tabellierte thermodynamische Zustandsgrößen des Wassers enthält, um so ihre Anwendung zu erleichtern. In einigen Fällen wurden die Lösungen gewisser Gleichungen im gesamten interessierenden Bereich graphisch ermittelt und dargestellt. Schließlich wird noch auf offene Fragen hingewiesen, die einer Klärung durch das Experiment bedürfen.

Abstract. Thermodynamic phenomena in a steam rocket are analysed and equations for the design are given. The following problems are discussed: Outflow of hot water from the boiler (connection between pressure and amount of fluid in the vessel), measures against unwanted delay in boiling during expansion in the nozzle, calculating of LAVAL states in the nozzle, calculation of thrust, design of the nozzle. It was attempted to present the equations in a form suitable for immediate application by using only standard thermodynamic quantities of state. In some cases certain equations are treated graphically and solutions are given over the whole range of practical interest. Finally the need for further experimental research is pointed out in connection with some as yet unsolved problems.

Résumé. Les processus thermodynamiques dans un moteur à vapeur d'eau sont analysés et des formules de dimensionnement applicables à ces moteurs sont établies. Dans cet article se trouvent traités les points suivants: l'éjection d'eau chaude du réservoir (correlation entre la pression dans le réservoir et son degré de remplissage), l'évaluation du phénomène de retard à l'ébullition lors de l'expansion dans la tuyère, le calcul de l'écoulement, celui du frottement tangentiel et le problème de l'adaptation de la tuyère. L'auteur s'est efforcé de mettre les équations sous une forme qui, pour la facilité des applications, ne fasse intervenir que des grandeurs thermodynamiques tabulées pour l'eau. Dans quelques cas la solution de certaines équations, dans le domaine intéressant des variables, est présentée sous forme graphique. Enfin l'accent est mis sur certaines questions encore ouvertes mais auxquelles on peut espérer qu'une réponse sera donnée par l'expérience.

¹ Vorgetragen beim VII. Internationalen Astronautischen Kongreß in Rom, September 1956.

² I. Institut für Mechanik der Technischen Hochschule, Wien, IV., Karlsplatz 13, Österreich.

I. Einleitung und allgemeine Prinzipanordnung einer Wasserdampfkrakete

Obwohl bereits einige Arbeiten über Wasserdampfkraketen vorliegen [1], [2] und auch experimentelle Untersuchungen im Gange sind¹, hat es dennoch den Anschein, als ob das Problem der Dimensionierung von Wasserdampfkraketen (Auslegung auf vorgegebenen Schub, Konstruktion der Expansionsdüse) noch nicht behandelt worden wäre; zumindest nicht in öffentlich zugänglichen Arbeiten. Es soll daher in dieser Arbeit versucht werden, ausgehend von den Grundgesetzen der Thermodynamik die Vorgänge in einer Wasserdampfkrakete quantitativ zu erfassen und auf diese Weise zu Richtlinien für die Auslegung vor allem der Schubdüse und des Heißwasserspeichers zu gelangen. Allerdings kann bei einem verhältnismäßig komplizierten Vorgang, wie ihn die Expansion nassen Dampfes in einer Schubdüse darstellt, nicht erwartet werden, sämtliche physikalischen Größen, die irgendwie auf den betrachteten Vorgang Einfluß haben, berücksichtigen zu können. Das würde nur zur Aufstellung ellenlanger Gleichungen führen, die infolge der großen Anzahl in ihnen vorkommender Parameter für jeden Einzelfall numerisch oder graphisch gelöst werden müßten — wobei stillschweigend vorausgesetzt wurde, daß der physikalische Hintergrund aller Ein-

flüsse wirklich vollkommen klar ist, also nur der mathematischen Formulierung bedarf, was man von der Kondensation des Naßdampfes an der Schubdüsenwand oder vom Siedeverzug nicht behaupten kann. Den Einfluß eines an der Düsenwand haftenden Filmes kondensierten Wassers auf die Thermodynamik und die Strömungsvorgänge in der Düse wird man wohl vernachlässigen dürfen; nicht aber den Einfluß des Siedeverzuges. Da sich nun einerseits — wie schon bemerkt wurde — der Siedeverzug und die mit ihm aufs engste verknüpften kinetischen Vorgänge bei der spontanen Verdampfung von der Theorie her kaum quantitativ erfassen lassen, andererseits deren kommentarlose Nichtbeachtung in den Grundgleichungen unstatthaft wäre, muß wenigstens versucht werden, ihren Einfluß auf die thermodynamischen Vorgänge durch konstruktive Maßnahmen so klein zu halten, daß diese dann als eine Folge von Gleichgewichtszuständen aufgefaßt und die Hauptsätze der Thermodynamik ohne besondere Vorsicht angewendet werden dürfen. Die Benützung von Zustandsdiagrammen und Dampftabellen, deren Angaben sich bekanntlich auf Gleichgewichtszustände beziehen, ist dann ebenfalls möglich.

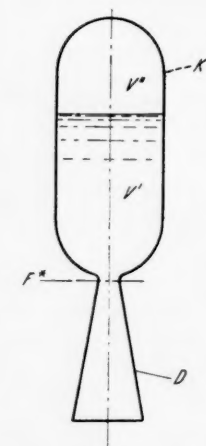


Abb. 1

Nach diesen einleitenden Bemerkungen soll jetzt kurz auf den prinzipiellen Bau einer Wasserdampfkrakete eingegangen werden. Diese besteht (vgl. Abb. 1) im wesentlichen aus einem Speicher K, aus dem Heißwasser über die Schubdüse D nach außen abströmt. Unter der Voraussetzung, daß kein Siedeverzug auftritt, haben wir es also mit einer adiabatischen Expansion, beginnend von der unteren Grenzkurve, zu tun. Im engsten Querschnitt F^* der Schubdüse wird dann das Maximum der Mengenstromdichte auftreten und die Strömung wird auch im erweiterten Teil der Düse an deren Wandung anliegen. Im Speicher K wird gleichfalls eine Nachverdampfung auftreten und über der flüssigen Phase V' (Heißwasser) wird sich eine Gasphase V'' satten Dampfes ausbilden, die, natürlich auch unter der Voraussetzung fehlenden Siedeverzuges im Speicher, mit der

¹ Am Institut für Physik der Strahlantriebe in Stuttgart; in Paris sollen ebenfalls Versuche im Gange sein.

flüssigen Phase V' im thermodynamischen Gleichgewicht steht. Der Siedeverzug im Speicher wird wohl verhältnismäßig einfach beseitigt, bzw. auf ein nicht mehr störendes Maß hinabgedrückt werden können. Schon eine raue Innenwand [3] des Speichers dürfte die Nachverdampfung des Speicherwassers günstig beeinflussen. Um noch ein Übriges in dieser Richtung zu tun, könnte man z. B. Drahtnetze als „künstliche Rauigkeit“ im Speicher befestigen und so die Möglichkeit der Bildung von Dampfkeimen im Speicherwasser wesentlich begünstigen.

Schwieriger zu beseitigen ist der Siedeverzug in der Schubdüse; um so einschneidender machen sich aber gerade dort seine Einflüsse bemerkbar. Wenn nämlich infolge der hohen Strömungsgeschwindigkeiten in der Schubdüse (Größenordnung 10^2 m/s) und der damit verbundenen raschen Zustandsänderungen, die das aus dem Speicher abströmende Wasser erfährt, der Verdampfungsvorgang mit diesen nicht Schritt halten kann, wird die Strömung im erweiterten Teil der Schubdüse nicht mehr an deren Wandung anliegen. Nach dem engsten Querschnitt F^* wird sich ein Freistrahл überhitzten Wassers ausbilden, der an seiner Oberfläche eine (allerdings viel zu geringe) Verdampfung zeigen und einen großen Teil der noch zur Verfügung stehenden Enthalpiedifferenz aus dem Bereich der Düse abführen wird. Die Strömung kann dann im erweiterten Düsenteil nicht mehr wesentlich beschleunigt werden und es ist in einem solchen Falle vom Standpunkt der Strömungslehre überhaupt sinnlos, eine LAVAL-Düse als Schubdüse an den Speicher anzuschließen.

II. Der Aufbau einer mit Heißwasserzerstäubung arbeitenden Wasserdampfkrakete

Unser Bestreben muß deshalb dahin gerichtet sein, die Verdampfung des aus dem Speicher abströmenden Heißwassers so zu begünstigen, daß die Ausbildung eines Heißwasser-Freistrahles sicher vermieden wird und die Strömung auch im erweiterten Teil der Schubdüse keine Ablöserscheinungen zeigt. Um dies zu erreichen, sei hier vorgeschlagen, das Heißwasser unmittelbar nach seinem Austritt aus dem Speicher zu zerstäuben. Es ist zu erwarten, daß durch das Zerreißen des aus dem Speicher austretenden Heißwasserstrahles in eine große Anzahl mikroskopisch kleiner Tröpfchen (Größenordnung 10^{-3} cm) das Auftreten des Siedeverzuges wirksam unterdrückt und daß auch durch die wesentliche Oberflächenvergrößerung, die das Heißwasser durch die Zerstäubung erfährt, der Verdampfungsvorgang günstig beeinflusst wird.

Der Aufbau einer solchen, mit Heißwasserzerstäubung arbeitenden Wasserdampfkrakete würde etwa folgendermaßen (Abb. 2) aussehen: Unmittelbar an den Speicher K ist die Zerstäubungsdüse Z angeschlossen. (Auf die Zerstäubungsdüse wird im Abschnitt IV noch näher eingegangen werden.) Das zerstäubte Heißwasser tritt nun in die Wirbelkammer¹ W ein, die den Zweck hat, die Bildung eines möglichst homogenen Naßdampfes zu gestatten. Erst dieser strömt

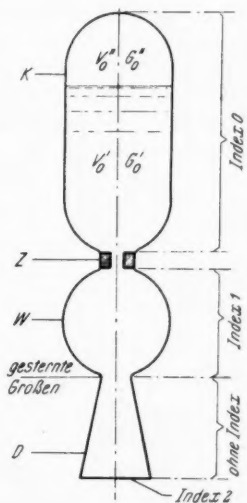


Abb. 2

¹ Eine Vorexpanionskammer für Wasserdampfkraketen wurde schon von E. SÄNGER geplant; ob SÄNGER jedoch auch an eine Zerstäubung des Heißwassers dachte, ist nicht bekannt geworden.

nun durch die Schubdüse D nach außen ab¹. Je feiner die flüssige Phase im Naßdampf verteilt ist, um so eher wird man die Düsenströmung als eine Folge thermodynamischer Gleichgewichtszustände betrachten und ihre Berechnung unter Zuhilfenahme der bekannten Dampf tafeln durchführen dürfen. Mit der genaueren Behandlung der thermodynamischen und der Strömungsvorgänge wollen wir beim Speicher beginnen, sodann die Vorgänge in der Zerstäubungsdüse und schließlich diejenigen in der Schubdüse einer schärferen Betrachtung unterziehen.

III. Die thermodynamischen Verhältnisse im Speicher beim Ausströmen des Heißwassers

Die Frage, die sich sofort bei Untersuchung der Vorgänge im Speicher aufdrängt, kann folgendermaßen formuliert werden: Beim Abströmen des Heißwassers aus dem Speicher wird diesem mit jedem Wasserteilchen auch eine gewisse Wärmemenge entnommen. Zugleich tritt im Speicher eine Nachverdampfung des Speicherwassers auf. Wie hängt nun — genügend rasche Einstellung des thermodynamischen Gleichgewichtes im Speicher vorausgesetzt — der Speicherdruck von der entnommenen Heißwassermenge ab?

Nehmen wir an, es befinde sich ein gewisses Heißwassergewicht G_0' und ein gewisses Dampfgewicht G_0'' im Speicher. Die gesamte jeweilige Speicherfüllung ergibt sich dann zu:

$$G_0 = G_0' + G_0''. \quad (1)$$

Führen wir noch das konstante Speicher-Volumen V_0 ein, so können wir für den Speicher den ersten Hauptsatz anschreiben:

$$dQ_0 = dJ_0 - V_0 dP_0. \quad (2)$$

Hierin bedeuten J_0 die gesamte Speicher-Enthalpie und P_0 den Speicherdruck. Im übrigen sei hier bemerkt, daß wir alle Größen, die sich auf den Speicher beziehen, mit dem Index 0 versehen wollen.

Schreiten wir weiter und lassen wir jetzt Heißwasser vom Speicher in die Wirbelkammer einströmen. Dadurch wird dem Speicher mit jedem Heißwasserteilchen eine gewisse Wärmemenge entzogen; nennen wir sie dQ_1 . Die Wärmebilanz, aufgestellt für zwei benachbarte Speicherzustände, lautet dann:

$$Q_0 = (Q_0 + dQ_0) + dQ_1$$

bzw.

$$dQ_0 + dQ_1 = 0. \quad (3)$$

Mit Gl. (2) ergibt sich:

$$dJ_0 - V_0 dP_0 + dQ_1 = 0. \quad (4)$$

Nun wollen wir die Größe der entnommenen Wärmemenge dQ_1 ermitteln. Dazu schreiben wir für das in die Wirbelkammer einströmende Wasser den I. Hauptsatz an:

$$dq = di - v dP. \quad (5)$$

Die klein geschriebenen Größen q, i sind die auf die Gewichtseinheit bezogene Wärmemenge und Enthalpie; v ist das spezifische Volumen.

¹ Die zweifellos vorhandene Relativgeschwindigkeit zwischen Dampfphase und Tröpfchenphase wird hier nicht berücksichtigt. Das soll jedoch in einer Arbeit geschehen, die demnächst in „Maschinenbau u. Wärmewirtschaft“ erscheinen wird; die diesbezüglichen Ausführungen in der Arbeit von O. FRENZL [6] können nicht als befriedigend bezeichnet werden.

Setzen wir für den Augenblick voraus, daß das Heißwasser auf seinem Weg vom Speicher in die Wirbelkammer keine Wärme mit der Umgebung austauscht ($dq = 0$), so erhalten wir aus (5) im Verein mit der eindimensionalen Bewegungsgleichung der Hydrodynamik

$$d\frac{w^2}{2g} + v dP = 0, \quad (6)$$

die Energiegleichung

$$\frac{w^2}{2g} + i = \text{const.} \quad (7)$$

Da das Wasser im Speicher praktisch die Geschwindigkeit $w = 0$ hat, können wir auch schreiben:

$$\frac{w^2}{2g} + i = i_0'. \quad (8)$$

(Ein Strich als oberer Index bedeutet wie üblich: „Zustand an der unteren Grenzkurve“; zwei Striche „Zustand an der oberen Grenzkurve“. Daher ist i_0' die Enthalpie pro Gewichtseinheit des im Speicher befindlichen Heißwassers.)

Man überlegt sich nun leicht, daß i_0' tatsächlich die gesamte Wärmemenge ist, die je Gewichtseinheit abströmenden Heißwassers dem Speicher entzogen wird. Das geht so: Aus Gl. (5) und Gl. (6) folgt

$$dq = d\left(\frac{w^2}{2g} + i\right). \quad (9)$$

Eine zugeführte Wärmemenge kann sich demnach nur in einer Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit sowie der Enthalpie der Substanz auswirken. Natürlich muß hierbei vorausgesetzt werden, daß die Wärmemenge dq tatsächlich auf das Substanzelement übertragen wird und nicht etwa durch Wärmeaustausch mit anderen Körpern der Umgebung teilweise verloren geht. Da nun Gl. (9) für alle zugeführten Wärmemengen dq gilt, so muß auch i_0' die gesamte in der Gewichtseinheit des Speicherwassers enthaltene Wärme darstellen.

Und nun können wir auch die vorhin aufgestellte Voraussetzung des fehlenden Wärmeaustausches mit der Umgebung fallen lassen: denn was auch immer mit dem Heißwasser nach seinem Abströmen aus dem Speicher geschieht — dem Speicher selbst wird in allen Fällen je Gewichtseinheit ausströmenden Heißwassers die Wärmemenge i_0' entzogen.

Die gesuchte Wärmemenge dQ_1 bezieht sich nun auf ein ausströmendes Heißwasserelement; sein Gewicht wollen wir mit dG_1 bezeichnen. Dieses Heißwasserteilchen führt also nach den vorangegangenen Überlegungen aus dem Speicher die Wärmemenge

$$dQ_1 = i_0' dG_1 \quad (10)$$

ab. Schließlich muß die Speicherfüllung G_0 um den Betrag des abgeströmten Heißwassergewichtes dG_1 leichter werden; wir drücken das durch die Gleichung

$$dG_1 = -dG_0 \quad (11)$$

aus. Unter Berücksichtigung von (10) und (11) erhält nun Gl. (4) die Form

$$dJ_0 - V_0 dP_0 - i_0' dG_0 = 0. \quad (12)$$

Wir gehen jetzt von der gesamten Speicherenthalpie auf die Enthalpie je Gewichtseinheit der Speicherfüllung über, schreiben also

$$J_0 = G_0 i_0. \quad (13)$$

Berücksichtigen wir noch, daß

$$\frac{G_0}{V_0} = \gamma_0 \quad (14)$$

($V_0 = \text{const!}$) das mittlere spezifische Gewicht der Speicherfüllung bedeutet und recht gut als Maß für den jeweiligen Speicherinhalt brauchbar ist, so folgt aus (12) unter Verwendung von (13) und (14)

$$d(\gamma_0 i_0) - dP_0 - i_0' d\gamma_0 = 0. \quad (15)$$

Während der weiteren Rechnungen in diesem Abschnitt wollen wir den Index 0 fortlassen; da eine Verwechslung ausgeschlossen erscheint, können wir uns diese Bequemlichkeit ohne weiteres gestatten.

Nun wollen wir Gl. (15), die eine Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $P(\gamma)$ darstellt, auf eine Form bringen, die ihre graphische, bzw. numerische Integration möglichst einfach auszuführen gestattet. Wir werden daher vor allem trachten, ihre Koeffizienten auf tabellierte Größen zurückzuführen.

Die Speicherenenthalpie je Gewichtseinheit i läßt sich mit Hilfe des spezifischen Dampfgehaltes

$$x = \frac{G''}{G} \quad (16)$$

und der Verdampfungswärme je Gewichtseinheit

$$r = i'' - i' \quad (17)$$

wie folgt schreiben:

$$i = i' + x(i'' - i') = i' + xr. \quad (18)$$

Gl. (18) in (15) eingesetzt, ergibt nach kurzer Umformung:

$$\gamma di' + d(\gamma x r) - dP = 0. \quad (19)$$

Bis auf den Dampfgehalt x , der hier nicht als Parameter auftritt, sondern eine abhängige Variable darstellt, enthält (19) nur mehr die tabellierten Größen i' und r als Koeffizienten. Wir müssen also trachten, diesen zu eliminieren. Das gelingt auf folgende Weise: Wir drücken das gesamte Speichervolumen V durch die spezifischen Volumina v' und v'' des im Speicher befindlichen Heißwassers und Sattdampfes, sowie durch deren Gewichte G' und G'' aus:

$$V = v' G' + v'' G''. \quad (20)$$

Mittels der Beziehungen (1) und (16) ersetzen wir in (20) G' und G'' durch G und x und erhalten

$$V = [v' (1 - x) + x v''] G \quad (21)$$

sowie explizit

$$x = \frac{\frac{V}{G} - v'}{v'' - v'}$$

bzw.

$$x = \frac{1 - v' \gamma}{\gamma(v'' - v')}. \quad (22)$$

Das ist die Gleichung, die wir noch benötigt haben, um in (19) sämtliche Koeffizienten durch tabellierte Größen auszudrücken. Nach Einsetzen von (22), Ausdifferenzieren des Ausdruckes $d(\gamma x r)$ und Ordnen der Glieder folgt aus (19) die Differentialgleichung

$$-\frac{r v'}{v'' - v'} d\gamma + \gamma d\left(i' - \frac{r v'}{v'' - v'}\right) + d\left(\frac{r}{v'' - v'} - P\right) = 0. \quad (23)$$

Obzwar diese Gleichung bereits hinsichtlich des Baues ihrer Koeffizienten die an sie gestellten Bedingungen erfüllt, wollen wir trotzdem noch kurze Zeit für ihre Vereinfachung verwenden. Zu diesem Zweck ziehen wir zunächst die CLAUSIUS-CLAPEYRONsche Gleichung in der Form

$$\frac{r}{v'' - v'} = T \frac{dP}{dT} \quad (24)$$

heran. Hier bedeutet bekanntlich dP/dT die Steigung der Dampfdruckkurve; Druck und Temperatur sind ja im Zweiphasengebiet (Naßdampfgebiet) miteinander gekoppelt.

Nach der Eliminierung des Ausdruckes $\frac{r}{v'' - v'}$ aus (23) und (24) gelangen wir zu der Gleichung

$$-v' T \frac{dP}{dT} d\gamma + \gamma d\left(i' - v' T \frac{dP}{dT}\right) + d\left(T \frac{dP}{dT} - P\right) = 0. \quad (25)$$

Diese sieht zwar schon bequemer aus als (23), kann aber mit etwas Geduld noch weiter vereinfacht werden. Deklarieren wir zunächst offiziell P als unabhängige Variable. Dann bekommt (25) die Gestalt

$$-v' T \frac{dP}{dT} \frac{d\gamma}{dP} + \gamma \frac{d}{dP} \left(i' - v' T \frac{dP}{dT}\right) + \frac{d}{dP} \left(T \frac{dP}{dT} - P\right) = 0. \quad (26)$$

Weiters rechnen wir den Ausdruck $\frac{d}{dP} \left(T \frac{dP}{dT} - P\right)$ aus:

$$\frac{d}{dP} \left(T \frac{dP}{dT} - P\right) = \frac{dT}{dP} \cdot \frac{dP}{dT} + T \frac{d}{dT} \left(\frac{dP}{dT}\right) - 1 = T \frac{d}{dP} \left(\frac{dP}{dT}\right). \quad (27)$$

Und nun formen wir noch den Koeffizienten $\frac{d}{dP} \left(i' - v' T \frac{dP}{dT}\right)$ um:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dP} \left(i' - v' T \frac{dP}{dT}\right) &= \frac{di'}{dP} - v' \frac{dT}{dP} \cdot \frac{dP}{dT} - T \frac{d}{dP} \left(v' \frac{dP}{dT}\right) = \\ &= \frac{di' - v' dP}{dP} - T \frac{d}{dP} \left(v' \frac{dP}{dT}\right). \end{aligned}$$

Führen wir jetzt die Entropie an der unteren Grenzkurve ein, $ds' = \frac{dq'}{T}$, und beachten wir, daß nach dem ersten Hauptsatz $dq' = di' - v' dP$ ist, dann finden wir schließlich die gesuchte Umformung:

$$\frac{d}{dP} \left(i' - v' T \frac{dP}{dT}\right) = T \frac{ds'}{dP} - T \frac{d}{dP} \left(v' \frac{dP}{dT}\right) = T \frac{d}{dP} \left(s' - v' \frac{dP}{dT}\right). \quad (28)$$

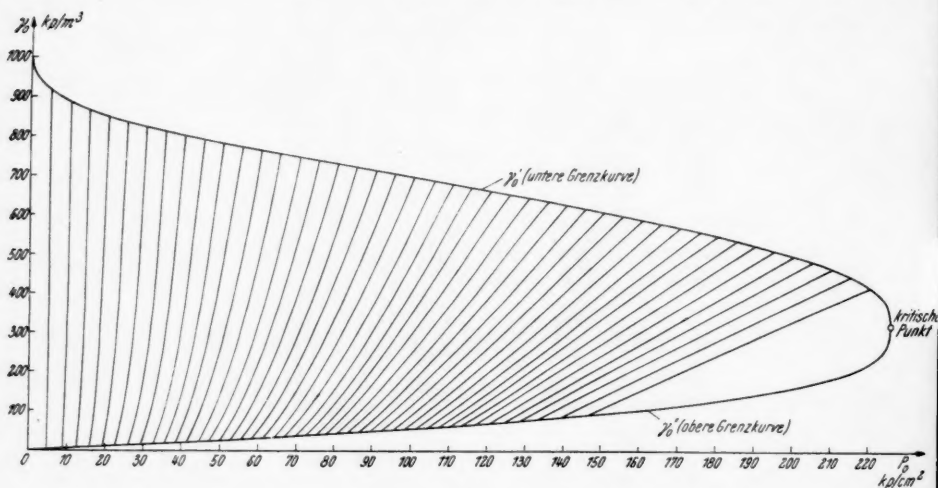
Nach Einsetzen von (27) und (28) in (26), sowie Division durch T erhalten wir die endgültige Form der Differentialgleichung für den Ablauf der Speicherzustände:

$$-v' \frac{dP}{dT} \cdot \frac{d\gamma}{dP} + \gamma \frac{d}{dP} \left(s' - v' \frac{dP}{dT}\right) + \frac{d}{dP} \left(\frac{dP}{dT}\right) = 0. \quad (29)$$

Ihre Koeffizienten:

$$-v' \frac{dP}{dT}, \quad \frac{d}{dP} \left(s' - v' \frac{dP}{dT}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dP} \left(\frac{dP}{dT}\right)$$

wurden unter Benützung der VDI-Wasserdampf tafeln berechnet; die Gleichung selbst — sie liefert, wie man sieht, nicht die Funktion $P = P(\gamma)$, sondern deren Umkehrfunktion $\gamma = \gamma(P)$, was aber nicht weiter stört — wurde für das gesamte Naßdampfgebiet graphisch gelöst. Benützt wurde für Drücke bis etwa 110 kp/cm² das Isoklinenverfahren, für höhere Drücke ein nomographisches Verfahren, welches mit der Methode der Halbschritte kombiniert wurde. Nähere Einzelheiten über diese Verfahren sind in der Literatur zu finden, auf die wir daher an dieser Stelle verweisen wollen [4], [5]. Das Ergebnis der graphischen Lösung



Tafel I. Lösungsfeld der Differentialgleichung

$$-v_0' \frac{dP_0}{dT_0} \cdot \frac{d\gamma_0}{dP_0} + \gamma_0 \frac{d}{dP_0} \left(s_0' - v_0' \frac{dP_0}{dT_0} \right) + \frac{d}{dP_0} \left(\frac{dP_0}{dT_0} \right) = 0$$

ist in Tafel I festgehalten¹. Einer Bemerkung von H. H. KÖLLE [1] zufolge hat K. HESS eine Formel für die Abhängigkeit der Ausströmgeschwindigkeit bzw., was auf dasselbe hinausläuft, der verfügbaren Enthalpiedifferenz des Heißwassers von der Speicherfüllung aufgestellt; in dieser kommt aber nach KÖLLE die Zeit explizit vor, was bei Voraussetzung thermodynamischen Gleichgewichtes in jedem Augenblick, sowie stationärer Strömung — und dies wurde auch bei der von KÖLLE zitierten Arbeit gefordert — völlig unverständlich ist. Nimmt man an, daß in allen Teilen der Wasserdampfkrakete die Vorgänge so ablaufen, daß sie eine Folge thermodynamischer Gleichgewichtszustände darstellen, so können Ausströmgeschwindigkeit, sowie auch sämtliche thermodynamischen Größen nur vom Anfangsdruck im Speicher, von der jeweiligen Speicherfüllung und — bei Wasserdampfkraketen mit Heißwasserzerstäubung — vom Druck in der Wirbelkammer abhängen. Eine explizite Abhängigkeit dieser Größen von der Zeit kommt jedenfalls nicht in Frage.

IV. Die Zerstäubungsdüse und Diskussion des Einflusses der Oberflächenspannung auf die thermodynamischen Zustände

Wie wir schon in Abschnitt II erwähnt haben, hat die Zerstäubungsdüse die Aufgabe, durch die wesentliche Oberflächenvergrößerung, die das aus dem

¹ Meßwerte finden sich in [6].

Speicher abströmende Heißwasser je Gewichtseinheit erfährt, den Verdampfungsvorgang in der nachfolgenden LAVAL-Düse günstig zu beeinflussen. Bezeichnen wir mit δ den mittleren Tröpfchendurchmesser des zerstäubten Heißwassers, dann nimmt dessen Oberfläche je Gewichtseinheit mit $1/\delta$ zu, wenn δ kleiner wird. Das ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß das Gewicht eines Tröpfchens

mit δ^3 abnimmt, die Oberfläche jedoch mit δ^2 . Der Quotient $\frac{\text{Oberfläche}}{\text{Gewicht}}$ muß

dann demnach mit $1/\delta$ zunehmen. Wir werden also danach trachten, δ möglichst klein zu machen, das heißt das Heißwasser möglichst fein zu zerstäuben. Besonders günstig arbeiten solche Düsen, bei denen die Zerstäubung dadurch erreicht wird, daß der Flüssigkeit vor dem Verlassen der Düse ein kräftiger Drall erteilt wird. Auf eine einfache und strömungstechnisch einwandfreie Art kann dies mit Hilfe eines Spiralgehäuses erreicht werden (Abb. 3). Die Vorgänge in solchen Düsen sind bereits quantitativ erfaßt [7], [8] und die Ergebnisse der theoretischen Arbeiten durch das Experiment bestätigt. Untersuchen wir nun, ob die Resultate der genannten Arbeiten für unsere Zwecke ohne weiteres benützt werden dürfen, oder ob dies nur unter gewissen Bedingungen zulässig ist. Eine Bedingung läßt sich sofort angeben: Das Heißwasser darf während der Strömung durch die Zerstäubungsdüse nicht zu sieden beginnen. Den erwähnten Untersuchungen wurde nämlich die inkompressible Flüssigkeit zugrunde gelegt und diese Voraussetzung verbietet die Anwendung ihrer Resultate auf Zerstäubungsdüsen, die von siedendem Wasser durchströmt werden. Auch die Reibungsverhältnisse sind bei der Strömung siedenden Wassers andere [9] als bei der Strömung nicht siedenden Wassers. Andererseits ist jedoch die Annahme, daß das Heißwasser schon bei der Strömung durch die Zerstäubungsdüse zu sieden beginnt, durchaus nicht zwingend; die Entscheidung zwischen beiden Strömungsformen dürfte stark von der Oberflächenbeschaffenheit [3] der Zerstäubungsdüse abhängen. Welche der beiden Strömungsformen die günstigere darstellt, ist nicht leicht gesagt. Die Düse, welche von überhitztem Wasser durchströmt wird, dürfte, bei gleicher Durchflußmenge, kleinere Abmessungen haben als diejenige, in der bereits Verdampfung des Heißwassers eintritt. Letztere wird jedoch gewiß unempfindlicher gegenüber Störungen sein, da in ihr keine metastabilen thermodynamischen Zustände auftreten. Es möge hier noch bemerkt werden, daß es wohl zweckmäßig sein wird, Zerstäubungsdüsen, die von siedendem Wasser durchströmt werden, so auszulegen, daß die LAVAL-Zustände innerhalb der Düsen nicht erreicht werden. Hierüber allgemeine Angaben zu machen, dürfte schwer gelingen, da die Strömung innerhalb einer Zerstäubungsdüse der idealisierenden Betrachtungsweise der Stromfaden Theorie nicht zugänglich ist — wie etwa die Strömung in einer Schubdüse — und die räumliche Behandlung eine viel zu große Anzahl geometrischer Parameter enthalten würde. Unter solchen Umständen wird wohl die vollständige Durchrechnung eines jeden Spezialfalles nicht zu vermeiden sein.

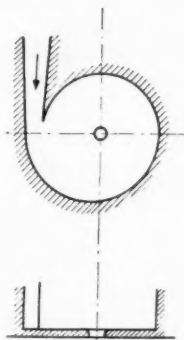


Abb. 3

Wir wollen uns indessen einem anderen Problem zuwenden: In der Wirbelkammer wird aus dem zerstäubten Heißwasser Naßdampf gebildet, dessen flüssige Phase aus kugelförmigen Wassertropfchen vom mittleren Durchmesser δ besteht. Auch bei der anschließenden Strömung durch die Schubdüse haben

wir dasselbe Bild vor uns. Es erhebt sich nun die Frage, ob nicht infolge der starken Krümmungen, welche die Oberflächen der kleinen Wassertropfchen besitzen, sowie der großen Oberflächen je Gewichtseinheit der flüssigen Phase, die Oberflächenspannung bzw. die Oberflächenenergie einen wesentlichen Einfluß auf die thermodynamischen und die Strömungsvorgänge ausübt. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns irgendeinen Anhaltspunkt für die Größenordnung der mittleren Tröpfchendurchmesser beschaffen. L. PRANDTL [10] schätzt den maximalen Durchmesser der Tröpfchen ab, die durch eine frei in Luft ausblasende Zerstäubungsdüse erzeugt werden. Er bedient sich dabei der Vorstellung, daß der austretende Flüssigkeitsstrahl unmittelbar nach Verlassen der Zerstäubungsdüse durch seine starke Turbulenz in große Tropfen zerlegt wird, die dann ihrerseits von den an ihnen angreifenden Luftkräften in kleine Tröpfchen zerrissen werden. Als Maß für die Luftkräfte verwendet PRANDTL den Staudruck, der an den Wassertropfchen infolge ihrer Bewegung mit der Geschwindigkeit v durch die umgebende Luft auftritt. Die Näherungsformel für den maximalen Tröpfchendurchmesser hat dann folgenden Bau:

$$\delta \approx k \frac{\sigma}{\frac{\rho_L}{2} v^2} \quad (30)$$

Hierin bedeuten σ die Kapillaritätskonstante, ρ_L die Dichte der umgebenden Luft und k einen dimensionslosen Proportionalitätsfaktor. Im Falle der Zerstäubungsdüse mit Drallkammer (Spiralgehäuse) wird die „Grobzerlegung“ des austretenden Wasserstrahles infolge seiner eigenen Turbulenz durch die auftretenden Trägheitskräfte [11] (Freistrah mit Drall!) noch wesentlich begünstigt. Über den Begriff des „Zerblasens“ der Tröpfchen in der Wirbelkammer müssen wir aber noch einige Worte verlieren. Der in der PRANDTLschen Beziehung vorkommende Staudruck $(\rho_L/2) v^2$ kann für ein Wassertropfchen, das in eine Naßdampfatmosfera hineingeschleudert wird, worin schon unzählige Tröpfchen der gleichen Größenordnung herumschwirren, nicht definiert werden; man weiß ja garnicht, was man unter der Größe ρ_L verstehen soll. Es ist aber naheliegend, den „Staudruck“ $(\rho_L/2) v^2$ nicht als Maß für die an der Tröpfchenoberfläche angreifenden Kräfte, sondern als Maß für die Bewegungsenergie E_T , der Tröpfchen zu verwenden. Statt (30) können wir dann schreiben:

$$\delta \approx k' \frac{\sigma}{E_T} \quad (31)$$

oder, wenn wir E_T , proportional der Differenz $(P_0 - P_1)$ zwischen Speicherdruck und Druck in der Wirbelkammer setzen:

$$\delta \approx K \frac{\sigma}{P_0 - P_1} \quad (32)$$

Die dimensionslose Konstante K dürfte nach experimentellen Ergebnissen bei 200 liegen.

Der Wert der Oberflächenspannung σ ist ziemlich stark temperaturabhängig. Er fällt mit steigender Temperatur nahezu linear ab, um beim kritischen Punkt zu verschwinden [12]. Danach wäre man geneigt anzunehmen, daß die Zerstäubung mit steigender Temperatur des Kesselwassers immer besser wird, das heißt immer kleinere Tröpfchen entstehen würden. Das ist aber nicht so. Zerstäubungsversuche mit Flüssigkeiten verschiedener Kapillaritätskonstanten haben ergeben, daß für die Tröpfchendurchmesser eine untere Grenze zu existieren scheint, die zwischen 10^{-4} und 10^{-3} cm liegt. Das ist verständlich, wenn man sich vor Augen hält, daß es sinnlos wird, noch von „Tröpfchen“ zu sprechen,

wenn deren Durchmesser mit der mittleren freien Weglänge der Tröpfchenmoleküle vergleichbar wird, die bei 10^{-5} cm liegt. Es dürfte nicht von der Hand zu weisen sein, wenn man annimmt, daß Tröpfchen, deren Durchmesser unter der erwähnten Schranke liegt, nicht beständig sein können, sondern sofort verdampfen. Da mit kleiner werdendem Tröpfchendurchmesser die Wahrscheinlichkeit für irgendein Molekül des Tröpfchens, im ungestörten Flug dessen Bereich verlassen zu können, immer größer wird, ist diese Annahme verständlich.

Nun können wir darangehen, den Einfluß der Oberflächenspannung auf die thermodynamischen und damit auch auf die Strömungsvorgänge in der Düse abzuschätzen. Wir müssen prinzipiell drei Fälle der Einflußannahme der Oberflächenspannung unterscheiden:

1. Beeinflussung der thermodynamischen Vorgänge durch die zusätzliche Oberflächenenergie der Wassertropfen.

2. Verschiebung der Grenzkurve und der Dampfdruckkurve bei gleichbleibenden spezifischen Volumina, bzw. gleichbleibender Temperatur zu höheren Drücken, bedingt durch den höheren Dampfdruck, der an der konvexen Tropfenoberfläche im Vergleich zu einer ebenen Oberfläche herrscht [3].

3. Flüssige Phase und gasförmige Phase des Naßdampfes haben im thermodynamischen Gleichgewicht zwar gleiche Temperatur, aber nicht mehr gleichen Druck, da die Wassertropfen zusätzlich unter dem Druck der Oberflächenspannung stehen [3].

Beginnen wir mit Punkt 1. Die wesentlichste energetische Größe des Verdampfungsvorganges ist wohl die Verdampfungswärme. Wir haben also zu untersuchen, ob die Oberflächenenergie je Gewichtseinheit zerstäubten Heißwassers ihrem Betrag nach mit dem Wert der Verdampfungswärme vergleichbar ist. Berechnen wir also die Oberflächenenergie je Gewichtseinheit von Tröpfchen mit dem Durchmesser δ . Ist die Oberfläche eines Wassertropfchens

$$O_{Tr} = \pi \delta^2,$$

so beträgt seine Oberflächenenergie

$$E_{Oberfl.} = \pi \delta^2 \sigma.$$

Das Tröpfchengewicht ermitteln wir zu

$$G_{Tr} = \frac{1}{v'} \cdot \frac{\pi}{6} \delta^3,$$

und es folgt daher für die Oberflächenenergie je Gewichtseinheit:

$$e = \frac{E_{Oberfl.}}{G_{Tr}} = 6 v' \frac{\sigma}{\delta}. \quad (33)$$

Rechnen wir den Betrag von e aus, so erhalten wir selbst für die kleinsten Tröpfchendurchmesser ($\delta = 10^{-4}$ cm) und die Oberflächenspannung des kalten Wassers ($\sigma = 71$ dyn/cm für 15° C) einen Wert, der fünf Größenordnungen unter dem der Verdampfungswärme liegt; Einflüsse gemäß Punkt 1 brauchen demnach nicht berücksichtigt zu werden. Im kritischen Punkt selbst verschwindet zwar die Verdampfungswärme, aber auch, wie bereits erwähnt, die Oberflächenspannung. Desgleichen hat es im kritischen Punkt keinen Sinn mehr, von zwei Phasen zu sprechen.

Schreiten wir nun weiter zu Punkt 2. Nach LORD KELVIN hat die Dampfdruckerhöhung Δp_2 an einer konvexen Tropfenoberfläche im Vergleich zur ebenen Flüssigkeitsoberfläche den Wert

$$\Delta p_2 = 4 \frac{\sigma}{\delta} \cdot \frac{v'}{v'' - v'} \quad (34)$$

¹ Dies ist nur eine Näherung; die genaue Formel findet man bei R. BECKER [13].

Setzen wir hier die vorhin genannten Beträge für σ und δ ein, so erkennen wir, daß die Dampfdruckerhöhung Δp_2 durchschnittlich etwa drei Größenordnungen unterhalb des Außendruckes liegt, wenn wir diesen mit 1 kp/cm^2 annehmen. Bezüglich der Umgebung des kritischen Punktes gilt dasselbe, was hierüber bereits zu Punkt 1 bemerkt wurde, wobei statt der Verdampfungswärme die Differenz $(v'' - v')$ der spezifischen Volumina an oberer und unterer Grenzkurve gemeint ist. Auch die Verschiebung der Grenzkurve sowie der Dampfdruckkurve braucht daher in unseren weiteren Rechnungen nicht berücksichtigt zu werden.

Zu Punkt 3: Bekanntlich ist der zusätzliche Druck Δp_3 , unter dem das Innere eines Flüssigkeitströpfchens infolge der Oberflächenspannung steht, durch die Beziehung

$$\Delta p_3 = 4 \frac{\sigma}{\delta} \quad (35)$$

gegeben. Wie man sofort erkennt, ist diese Druckerhöhung wesentlich größer als die unter Punkt 2 besprochene. Dennoch beträgt sie — bei gleichen Werten von σ und δ sowie bei einem Außendruck von 1 kp/cm^2 — nur etwa 8% des Außendruckes. Wegen der absichtlich sehr ungünstig gewählten Werte für σ und δ dürfte dieser Betrag eine sichere obere Grenze darstellen. Wenn wir uns nun vor Augen halten, daß wir die Berechnung der Vorgänge in der Schubdüse mit Hilfe der Stromfadentheorie durchführen wollen und zunächst auch die Reibung unberücksichtigt lassen, so wäre es wenig sinnvoll, den Einfluß der Oberflächenspannung gemäß Gl. (35) zu berücksichtigen. Hierzu wird noch einiges bei Behandlung der Frage der Schubdüsenanpassung an den Außendruck zu sagen sein. Sollte jedoch die Schubdüse für einen sehr geringen Außendruck ausgelegt werden, sagen wir etwa $0,1 \text{ kp/cm}^2$, so wird man in diesem Falle den erhöhten Druck, unter dem die flüssige Phase steht, berücksichtigen müssen. Für die bisher in Betracht gezogenen Anwendungsgebiete der Wasserdampftrakete brauchen wir das jedoch nicht tun. Abschließend sei zu diesem Abschnitt bemerkt, daß F. AUERBACH [14] durch andere Überlegungen, als sie hier durchgeführt wurden, zu der Ansicht gelangt, daß sich thermische Effekte, verursacht durch die Oberflächenspannung, wohl kaum beobachten lassen werden.

V. Ermittlung der Lavalzustände¹

In diesem Abschnitt wollen wir darangehen, die Zustände im engsten Querschnitt der Schubdüse zu berechnen; jene Größen also, die unbedingt bekannt sein müssen, wenn es um die Ermittlung des Mengendurchsatzes und damit des Schubes geht. Der Grundgedanke der Rechnung ist einfach und allgemein bekannt: Die Mengenstromdichte $(\gamma w) = (w/v)$ muß für den engsten Düsenquerschnitt F^* ein Maximum werden, sonst ist die Kontinuitätsgleichung für den Stromfaden

$$\gamma w F = \frac{w}{v} F = \text{const.}$$

verletzt. (Es bedeuten hier: γ das spezifische Gewicht, w die Strömungsgeschwindigkeit und F den Querschnitt an einem bestimmten Ort des Stromfadens, das heißt in unserem Fall der Schubdüse.) In der Gasdynamik wird nun gezeigt, daß die Bedingung $(\gamma w) = \text{Maximum!}$ für den engsten Düsenquerschnitt gleichbedeutend ist mit der Aussage, daß die Strömungsgeschwindigkeit in eben diesem Querschnitt gleich der dort herrschenden Schallgeschwindigkeit ist. Dieses in

¹ Nach einem Vorschlag von E. SCHMIDT werden hier die „kritischen Zustände“ im engsten Düsenquerschnitt als „LAVAL-Zustände“ bezeichnet.

der Gasdynamik allgemein gültige Ergebnis ist jedoch für uns durchaus nicht bindend; warum, wollen wir gleich näher erörtern: Mehrphasengemische, wie etwa nasser Dampf, den wir hier als strömendes Medium verwenden, können aus prinzipiellen Gründen nicht bis in ihre kleinsten Teile homogen sein; sonst wären sie ja gar keine Mehrphasengemische. Gase bestehen jedoch immer — wie viele Komponenten sie auch enthalten mögen — nur aus einer Phase. Die Gasdynamik braucht daher auf Inhomogenitäten ihrer strömenden Substanzen keine Rücksicht zu nehmen, sondern setzt deren Homogenität voraus.

Wir haben im Abschnitt II die Forderung aufgestellt, die flüssige Phase im Naßdampf möge so fein verteilt sein, daß die genügend rasche Einstellung des thermodynamischen Gleichgewichtes in jedem Düsenquerschnitt gewährleistet ist. Wenn wir aber die Frage stellen, unter welchen Umständen sich der Naßdampf als homogene Substanz gegenüber kleinen Störungen verhält, so führt das auf Bedingungen, welche die Frequenz der Störung, bzw. die Störgeschwindigkeit beinhalten und keine physikalische Beziehung zu der bereits erwähnten Forderung des Abschnittes II haben. Wir können uns das anschaulich folgendermaßen klar machen: Wird in einer Naßdampf Atmosphäre eine Schallschwingung erregt, so ist es ohne weiteres möglich (etwa bei genügend hoher Frequenz der Schwingung), daß die Ausbreitung der Schwingung von der Dampfphase allein übernommen wird. Die Trägheit der fein verteilten Wassertröpfchen kann sich so stark bemerkbar machen (besonders, wenn eine gegenseitige Beeinflussung der Tröpfchen wegen ihres großen gegenseitigen Abstandes, das heißt bei ziemlich trockenem Dampf, ausgeschlossen ist), daß sie die Schwingung der Dampfphase praktisch nicht mitmachen. In einem solchen Falle verhält sich der Naßdampf bezüglich einer Schallwelle nicht mehr wie ein homogenes Medium. Wenn, wie wir bereits erwähnt haben, die Ausbreitung einer Störung von einer Phase des Naßdampfes (z. B. der Dampfphase) allein übernommen wird, so wird auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Störung, die Schallgeschwindigkeit, nur von den thermodynamischen Zuständen in dieser Phase bestimmt. Das führt zu eigenartigen Folgerungen: Eine Schubdüse kann auf Grund der erfüllten Voraussetzungen aus Abschnitt II folgerichtig als LAVAL-Düse ausgeführt worden sein und trotzdem kann die Strömungsgeschwindigkeit auch im erweiterten Düsenteil unterhalb der dort herrschenden Schallgeschwindigkeit liegen. Dergleichen kann in gewissen Fällen eine von außen kommende Störung stromaufwärts durch die Düse bis in die Wirbelkammer dringen. Es soll hier aber nochmals betont werden, daß solche Besonderheiten nur bei Strömungen von Mehrphasengemischen auftreten können.

Wir wollen jetzt, genau wie im Abschnitt III bei der Analyse der Vorgänge im Speicher, die thermodynamischen Zustände in der Schubdüse auf tabellierte Größen zurückführen sowie ein Verfahren zur Ermittlung der LAVAL-Zustände¹ angeben. Beginnen wir mit der Strömungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Düsenquerschnitt. Diese ergibt sich aus Gl. (8) zu

$$w^2 = 2 g(i_0' - i), \quad (36)$$

wobei i hier als „laufende Koordinate“ zu verstehen ist, also die Enthalpie im eben betrachteten Querschnitt (in welchem die Strömungsgeschwindigkeit w herrscht) bedeutet. Gleichzeitig wurde vorausgesetzt, daß die Enthalpie des Heißwassers beim Zerstäuben konstant bleibt. Also:

$$i_1 = i_0'. \quad (37)$$

¹ Unter gewissen Vernachlässigungen wurden die LAVAL-Zustände für einen speziellen Fall in [6] berechnet.

(Der Index 1 kennzeichnet die Zustände in der Wirbelkammer.) Da die Bewegung der einzelnen Wassertropfchen in der Wirbelkammer schon kurz hinter der Zerstäubungsdüse eine vollkommen ungeordnete sein wird, können wir sie ohne weiteres als thermische Bewegung auffassen, so daß ein Enthalpieverlust bei der Zerstäubung nur durch Wärmeübergangs- und Wärmeleitungseffekte innerhalb der Zerstäubungsdüse zustandekommen kann.

Wir formen nun die Enthalpie i gemäß der Beziehung (18) um und erhalten nach Division durch $2g$

$$\frac{w^2}{2g} = i_0' - i' - x r. \quad (38)$$

Beachten wir nun weiter, daß die Abströmung des Naßdampfes aus der Wirbelkammer adiabatisch, das heißt im reibungsfreien Fall isentrop erfolgt, so können wir den Dampfgehalt x mit Hilfe der Entropie s_1 des Naßdampfes in der Wirbelkammer, sowie der Entropie s'' , bzw. s' des Sattdampfes, bzw. des Wassers an der unteren Grenzkurve ausdrücken. Es muß nämlich die Gleichung

$$s_1 = s = s' + x(s'' - s') = s' + x \frac{r}{T} \quad (39)$$

bestehen und aus dieser folgt

$$x = \frac{T}{r} (s_1 - s'). \quad (40)$$

Wir haben hier den Ausdruck $(s'' - s')$ gleich durch die Verdampfungswärme r und die absolute Temperatur T gemäß

$$(s'' - s') = \frac{r}{T} \quad (41)$$

ausgedrückt. Somit erhält Gl. (38) nach Einsetzen von (40) die Form:

$$\frac{w^2}{2g} = i_0' - i' + T s' - T s_1. \quad (42)$$

i_0' ist durch den Speicherdruck bzw. die Speichertemperatur bestimmt, $(-i' + T s')$ durch den Druck bzw. die Temperatur im jeweils betrachteten Düsenquerschnitt; die Entropie s_1 des Naßdampfes in der Wirbelkammer, die hier als Parameter auftritt, läßt sich leicht aus dem Speicherdruck und dem Druck in der Wirbelkammer (bzw. den entsprechenden Temperaturen) berechnen, wie gleich gezeigt werden soll. Spalten wir nämlich Gl. (37) gemäß (18) auf, so erhalten wir:

$$i_0' = i_1' + x_1 r_1 \quad (43)$$

und nach x_1 aufgelöst:

$$x_1 = \frac{i_0' - i_1'}{r_1}. \quad (44)$$

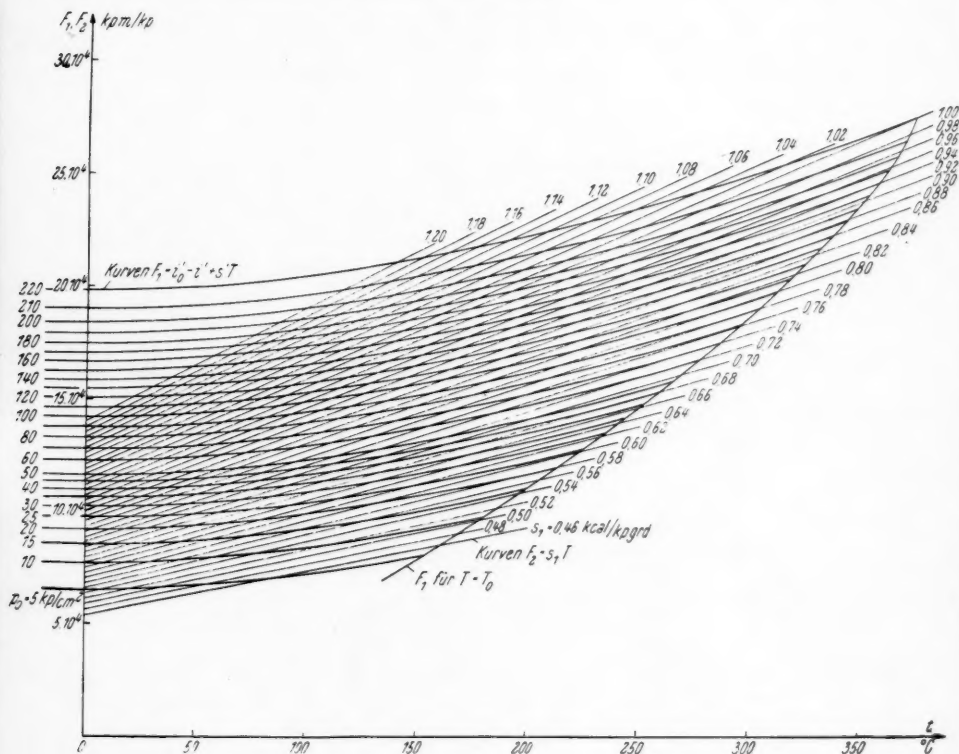
Und nun folgt, als Spezialfall von (39), für die Entropie in der Wirbelkammer

$$s_1 = s_1' + x_1 \frac{r_1}{T_1}. \quad (45)$$

Aus (44) und (45) gewinnen wir durch Eliminierung von x_1 die Beziehung für s_1 . Sie lautet:

$$s_1 = s_1' + \frac{1}{T_1} (i_0' - i_1'). \quad (46)$$

Wir können mit ihr s_1 bei bekanntem Speicher- sowie Wirbelkammerdruck unter Benützung der Wasserdampftafeln berechnen.



Tafel II. $\frac{w^2}{2g} = F_1 - F_2 = i_0' - i' + s' T - s_1 T$

Gl. (42) wurde in Tafel II graphisch veranschaulicht. Das Diagramm enthält s_1 und P_0 (statt i_0') als Parameter. Es kann, wie im nächsten Abschnitt noch zu sehen sein wird, auch zur Anpassung der Schubdüse an den Außendruck verwendet werden. Desgleichen ist es möglich, den Enthalpieverlust bei der Zerstäubung sowie die Reibungsverluste der Strömung in der Schubdüse näherungsweise zu berücksichtigen. Um den Enthalpieverlust zu erfassen, wählt man ein entsprechend geringeres i_0' , als es dem Speicherdruck entsprechen würde; den Gleichgewichtsdruck, der zu jenem kleineren i_0' gehört, nimmt man nun als Parameter P_0 für das Diagramm. Die Berücksichtigung der Reibungsverluste in der Schubdüse gestaltet sich gleichfalls sehr einfach. Da diese proportional

$\frac{w^2}{2g}$ angesetzt werden können, ist ihre Berücksichtigung bei der Bestimmung der Ausströmgeschwindigkeit wie auch der Strömungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Querschnitt der Schubdüse ohne weiteres möglich.

Zur Ermittlung der LAVAL-Zustände benötigen wir jetzt noch die Veränderlichkeit des spezifischen Volumens v des Naßdampfes längs einer Adiabate. Nach kurzer Umformung folgt aus Gl. (22) mit Rücksicht auf $\gamma = 1/v$:

$$v = v' + x(v'' - v'). \quad (47)$$

Den Dampfgehalt x längs der Adiabate, den wir hier benötigen, haben wir in Gl. (39) ausgerechnet. Das führt auf

$$v = v' + \frac{T(v'' - v')}{r} (s_1 - s'). \quad (48)$$

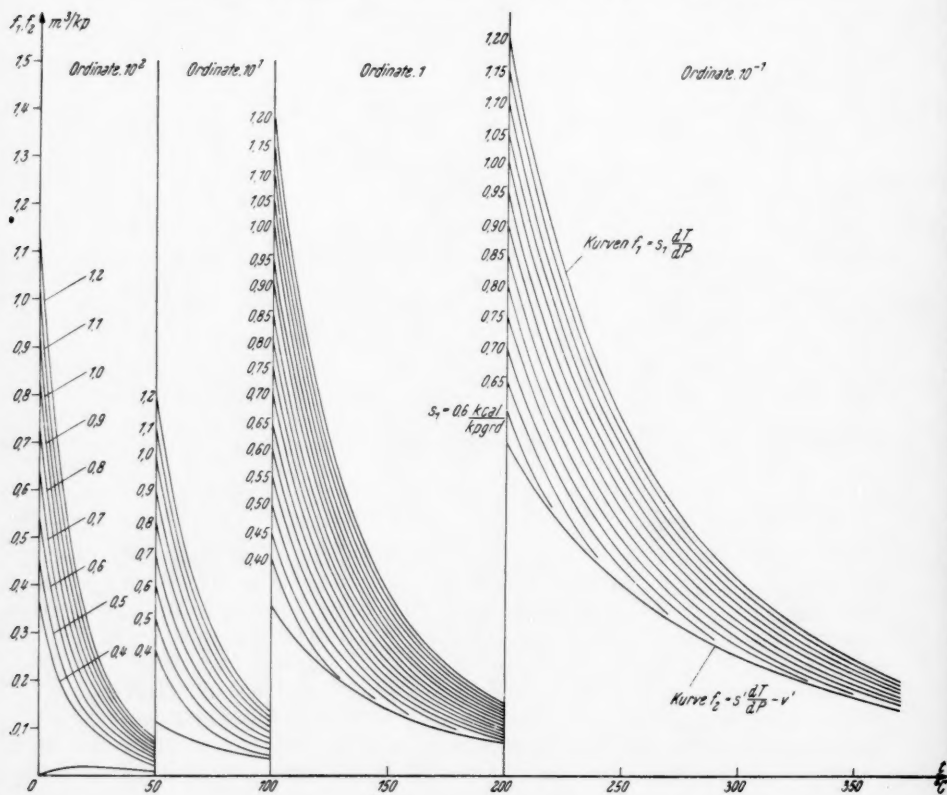
Nun ist aber gemäß der CLAUSIUS-CLAPEYRONschen Gleichung (24)

$$\frac{T(v'' - v')}{r} = \frac{dT}{dP},$$

womit wir (47) die vereinfachte Form

$$v = v' - s' \frac{dT}{dP} + s_1 \frac{dT}{dT} \quad (49)$$

geben können. Diese Formel ist in Tafel III als Kurvenschar mit s_1 als Parameter



Tafel III. $v = f_1 - f_2 = s_1 \frac{dT}{dP} - \left(s' \frac{dT}{dP} - v' \right)$

dargestellt. Zu beliebigen vorgegebenen Speicher- und Wirbelkammerzuständen, charakterisiert durch i_0' und s_1 , kann nun für jede Temperatur die Mengenstromdichte $\gamma w = w/v$ berechnet und so eine schrittweise Annäherung an deren Maximum erzielt werden. Die zum Maximum der Mengenstromdichte gehörige Temperatur T^* ist die LAVAL-Temperatur. Damit sind alle Größen bekannt, die zur Bestimmung des Schubes benötigt werden.

Diese einfache Methode wird wohl für die meisten praktisch vorkommenden Fälle ausreichen. Sollte es dennoch einmal erforderlich sein, das Maximum der Mengenstromdichte mit höherer Genauigkeit zu bestimmen, so kann man wie folgt verfahren: Aus der Forderung Mengenstromdichte = Maximum! das heißt

$$d\left(\frac{w}{v}\right) = 0 \quad (50)$$

erhält man durch Ausdifferenzieren:

$$dw - \frac{w}{v} dv = 0. \quad (51)$$

Eliminiert man in (51) dw mit Hilfe der Bewegungsgleichung (6), so führt das zu der Bedingung

$$\frac{w^2}{2g} = - \frac{v^2}{2 \frac{dv}{dP}}, \quad (52)$$

der die Strömungsgeschwindigkeit w genügen muß, falls ein Maximum der Mengenstromdichte vorliegen soll. Formell stellt (52) nichts anderes dar als den bekannten Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit $c^2 = dP/d\rho$, wovon man sich

durch Einsetzen von $\rho = \frac{1}{g v}$ leicht überzeugt. Physikalisch hat jedoch (52)

nichts mit dem Begriff der Schallgeschwindigkeit zu tun. Setzt man schließlich in (52) die Werte für v aus (49) ein, so nimmt (52) die Gestalt

$$\frac{w^2}{2g} = - \frac{\left(v' - s' \frac{dT}{dP} + s_1 \frac{dT}{dP}\right)^2}{2 \left(\frac{dv'}{dT} - \frac{ds'}{dP} \cdot \frac{dT}{dP} - s' \frac{d^2T}{dP^2} + s_1 \frac{d^2T}{dP^2}\right)} \quad (53)$$

an. Für bekanntes i'_0 sowie bekanntes s_1 stellen (53) und (42) (dieser Gleichung muß ja w ebenfalls genügen) zwei Kurven dar, deren Schnittpunkt die LAVAL-Temperatur bzw. den LAVAL-Druck fixiert. Kennt man diesen, so findet man die Mengenstromdichte aus den Gln. (42) und (49), bzw. die übrigen thermodynamischen Zustandsgrößen, falls diese von Interesse sind, aus den Wasserdampftafeln.

Wie man sofort erkennt, ist dieses Verfahren jedoch wesentlich komplizierter, als das zuerst genannte. Immerhin wäre es vielleicht lohnend, die LAVAL-Zustände für sämtliche in Betracht kommenden Werte der Parameter i'_0 und s_1 nach den Gln. (42) und (53) von einer programmgesteuerten Rechenmaschine berechnen zu lassen.

VI. Düsenanpassung an den Außendruck und Abschätzung der Verluste bei Fehlanpassung

Nachdem wir nun die Frage nach den LAVAL-Zuständen beantwortet haben, wollen wir gleich darangehen, einen anderen, für die Konstruktion der Schubdüse wichtigen Punkt zu behandeln. Gemeint ist die Anpassung der Düse an den Außendruck oder, was eigentlich dasselbe bedeutet, die Ermittlung des Düsenendquerschnittes. Hat man es — im einfachsten Fall — mit konstantem Wirbelkammerdruck P_1 und konstantem Außendruck P_a zu tun, dann erübrigt sich wohl ein näheres Eingehen auf diese Frage. Man braucht nur die zum Außendruck P_a gehörige Mengenstromdichte aus den Gln. (42), (46) und (49) zu bestimmen und erhält dann sofort aus der Kontinuitätsgleichung den gesuchten

Düsenendquerschnitt F_2 . In der Regel werden jedoch die Verhältnisse nicht so einfach liegen. Bei thermischen Raketen ist der Außendruck infolge der großen durchflogenen Höhendifferenz alles andere als konstant. Bei Wasserdampfraketen wird die Veränderlichkeit des Außendruckes weniger ins Gewicht fallen — man denkt ja vor allem daran, sie als Starthilfe zu verwenden —, jedoch darf die prinzipielle Veränderlichkeit des Speicher- und damit auch des Wirbelkammerdruckes nicht übersehen werden. In beiden Fällen wird, obwohl durch verschiedene Ursachen bedingt, der Außendruck P_a während eines Großteiles des Betriebsintervalles der Rakete nicht mit dem Düsenenddruck P_2 übereinstimmen. Von einer optimalen Anpassung der Schubdüse während des ganzen Betriebsintervalles kann also nicht die Rede sein. Es fragt sich nur, was günstiger ist: den Düsenenddruck über oder unter den Außendruck zu legen („Überanpassung“, bzw. „Unteranpassung“). Liegt der Düsenenddruck unterhalb des Außendruckes, dann geschieht etwas sehr Unangenehmes: Es läuft ein Verdichtungsstoß von außen in den erweiterten Düsenteil hinein und bleibt in diesem „hängen“. Durch einen Verdichtungsstoß wird nun bekanntlich Bewegungsenergie des strömenden Mediums in Wärme- und Druckenergie zurückverwandelt; ein Vorgang, den man mit einer Schubdüse durchaus nicht beabsichtigt. Weiters zeigen sich hinter dem Verdichtungsstoß gewöhnlich Ablösungserscheinungen der Strömung, die durch den starken Druckanstieg in der Grenzschicht, der als Folge des Verdichtungsstoßes auftritt, hervorgerufen werden [15]. Der Düsenteil, der sich stromabwärts über den Verdichtungsstoß hinaus erstreckt, ist demnach als nutzlos zu bezeichnen. Obwohl nun gemäß den Ausführungen des Abschnittes V in der Schubdüse einer Wasserdampfrakete bei Unteranpassung kein Verdichtungsstoß aufzutreten braucht, denn ein solcher kann nur entstehen, wenn die Strömungsgeschwindigkeit über der Schallgeschwindigkeit liegt, wollen wir diesen Fall hier ausschließen; und zwar aus folgendem Grunde: Die Schallgeschwindigkeit in gesättigtem Wasserdampf von 100^0 C (Zustand am Düsenendquerschnitt) liegt bei 420 m/s. Die Ausströmgeschwindigkeit erreicht aber schon bei Speicherdrücken von 50 kp/cm^2 500 m/s. Es ist also nur bei geringen Speicherdrücken mit der oben erwähnten Besonderheit zu rechnen und wir wollen sie deshalb hier außer acht lassen. Legen wir hingegen den Düsenenddruck über den Außendruck, so tritt kein Verdichtungsstoß und damit auch keine Ablösung der Strömung in der Schubdüse ein. Die Druck- und Wärmeenergie, die bei optimaler Anpassung noch in Bewegungsenergie des Treibstrahles hätte verwandelt werden können, äußert sich nach E. MACH im Auftreten von Wellen im Treibstrahl. Diese stellen aber ein weitaus geringeres Übel dar, als ein Verdichtungsstoß mit nachfolgender Strahlablösung. Daß der Gedanke der Überanpassung bei der Auslegung von Schubdüsen thermischer Raketen tatsächlich angewendet wird, zeigen etliche Photographien vom Flug solcher Raketen in höheren Luftschichten (wo also der Außendruck schon unter den Düsenenddruck gesunken ist), bei denen man deutlich die Druckwellen im Treibstrahl erkennen kann. Wir wollen die Schubdüse unserer Wasserdampfrakete gleichfalls so auslegen, daß sie am Ende des Betriebsintervalles, also bei geringstem Speicherdruck optimal ($P_a = P_2$) angepaßt ist; bei Betriebsbeginn arbeitet sie dann als überangepaßte Düse. Mit Hilfe der Tafeln II und III kann man den Schubverlust infolge Überanpassung angenähert erfassen. Zu diesem Zweck verfahren wir wie folgt: Wir greifen einen beliebigen Speicherdruck heraus, für den wir den zugehörigen, augenblicklichen Schubverlust R_s bestimmen wollen. Zu diesem Speicherdruck ermitteln wir die Ausströmgeschwindigkeit, die bei optimaler Anpassung auftreten würde. Ferner errechnen wir das Maximum der Mengestromdichte und damit den Mengestrom, da der engste Querschnitt

der Schubdüse festliegt. (Wir haben ja die Abmessungen unserer Schubdüse bereits auf den Speicherenddruck abgestimmt.) Kennen wir die optimale Ausströmgeschwindigkeit und den Mengendurchsatz, so kennen wir auch den Schub R_{opt} , der bei optimaler Anpassung erreicht werden kann. Am Düsenendquerschnitt F_2 ist aber, wie schon erwähnt wurde, nichts mehr zu ändern. Wir berechnen jetzt mit seiner Hilfe die im Düsenendquerschnitt herrschende Mengendichte nach der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{w_2}{v_2} = \frac{\frac{w^*}{v^*} F^*}{F_2} \quad (54)$$

Aus den Tafeln II und III bestimmen wir nun die zu der Mengendichte w_2/v_2 gehörige Strömungsgeschwindigkeit w_2 . Diese stellt die Ausströmgeschwindigkeit für die überangepaßte Schubdüse dar, mit welcher sich der tatsächlich wirkende Schub R aus

$$R = \frac{w^*}{v^*} F^* \cdot w_2 \quad (55)$$

ergibt. Der Schubverlust R_v ist dann durch die Differenz $(R_{opt} - R)$ gegeben. Will man den gesamten Antriebsverlust ermitteln, den die Rakete infolge Überanpassung der Schubdüse erleidet, so muß man das Integral $\int_{\tau} R_v dt$ berechnen.

Die Integration, die man am zweckmäßigsten graphisch durchführen wird, ist über das gesamte Betriebsintervall τ zu erstrecken.

Den Speicheranfangsdruck zu suchen, für den das Integral $\int_{\tau} R_v dt$ gegebenenfalls ein Minimum wird, hat wenig Sinn; denn, wie KÖLLE [1] richtig argumentiert hat, hängen die Fragen bezüglich eines Maximums des Gesamtantriebes $\int_{\tau} R dt$ je Gewichtseinheit der leeren Rakete wesentlich von den Eigenschaften des Speicher-Baumaterials ab.

VII. Düsenform und Verdampfungsgeschwindigkeit

Im Abschnitt II wurde der Vorschlag gemacht, das Heißwasser beim Austritt aus dem Speicher zu zerstäuben; auf diese Weise soll erreicht werden, daß sich die beiden Phasen des Naßdampfes bei der Strömung durch die Schubdüse „mit hinreichender Genauigkeit“ im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Nun, das war wohl etwas zu journalistisch ausgedrückt, und deshalb wollen wir uns jetzt die Aufgabe stellen, dasjenige genauer unter die Lupe zu nehmen, was wir ein wenig leichtfertig als „hinreichende Genauigkeit“ bezeichnet haben.

Es ist wohl einleuchtend, daß man einem nassen Dampf selbst bei äußerst feiner Zerstäubung (vgl. dazu die Ausführungen des Abschnittes IV) nicht zumuten darf, die Einstellung des thermodynamischen Gleichgewichtes beliebig rasch vorzunehmen. Das heißt also, wenn wir z. B. die adiabatische Zustandsänderung des Naßdampfes in der Schubdüse betrachten, daß die gemessenen Werte des Druckes, der Temperatur usw. immer eine gewisse Abweichung von den analogen, nach den Dampftafeln berechneten Größen zeigen werden. Es sei hier ausdrücklich bemerkt, daß die eben erwähnte Abweichung nichts mit Reibungs- oder Wärmeableitungseinflüssen zu tun hat; hier liegt vielmehr ein Problem des Wärme- und Stoffaustausches zwischen der flüssigen und der gasförmigen Phase des Naßdampfes vor. Da im thermodynamischen Gleichgewicht Wärme- und Stoffaustausch zwischen den beiden Phasen nicht voneinander un-

abhängig sind, können wir uns auf die Betrachtung eines der beiden Vorgänge beschränken. Welchen man wählt, ist eine Sache der Zweckmäßigkeit; wir wollen uns hier für den Stoffaustausch entscheiden.

Kehren wir jetzt zum speziellen Fall der adiabatischen Expansion des Naßdampfes in der Schubdüse zurück. Dieser wird, falls wir mit der Expansion an der unteren Grenzkurve beginnen, im Verlaufe der Expansion immer trockener werden; es muß also dauernd Wasser nachverdampfen. Dieser Verdampfungsvorgang wird an der Oberfläche der flüssigen Phase, also der (durch Zerstäubung erzeugten) Wassertropfchen stattfinden. Eine Dampfbildung auch im Innern der Tropfchen dürfte wohl ausgeschlossen sein. Es liegt nun nahe, als Maß für die Abweichung der tatsächlich durchlaufenen kinetischen Zustandsänderung von der Gleichgewichts-Adiabate die pro Zeiteinheit und Oberflächeneinheit der flüssigen Phase zu bildende Dampfmenge zu wählen, die gemäß der Gleichgewichts-Adiabate entstehen müßte. Je geringer diese „Oberflächenbelastung“ der flüssigen Phase sein wird, um so geringer wird auch die Abweichung der Expansionskurve von der Gleichgewichts-Adiabate sein. Als „zulässige Oberflächenbelastung“ ε wollen wir nun jene bezeichnen, für welche die eben erwähnten Abweichungen vom technischen Standpunkt gesehen vernachlässigbar klein werden. Ob ε druck- und temperaturabhängig ist, bleibe einstweilen dahingestellt.

Doch nun zur Kernfrage dieses Abschnittes: Wie muß man eine Schubdüse ausbilden, so daß zwar in jedem Querschnitt die zulässige Oberflächenbelastung erreicht, jedoch nirgends überschritten wird? Nützt man das zulässige ε nicht voll aus, so erhält man längere Düsen, die unweigerlich größere Reibungsverluste mit sich bringen. Das Ziel der folgenden Untersuchung wird also sein, eine Beziehung zwischen dem jeweiligen Düsenquerschnitt F und seiner Ortskoordinate z (s. Abb. 4), welche die eben gestellte Bedingung erfüllt, anzugeben.

Bezeichnen wir mit O' die gesamte Oberfläche der flüssigen Phase einer Naßdampfmenge vom Gewicht G , dann ist ε offenbar gegeben durch die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{1}{O'} \frac{DG''}{dt}, \quad (56)$$

wobei DG''/dt die substanzielle Änderung des Gewichtes der Dampfphase in der Zeiteinheit, also die entstehende Dampfmenge bedeutet. Aus der Oberfläche der flüssigen Phase

$$O' = N\pi\delta^2$$

sowie deren Volumen

$$V' = N \frac{\pi}{6} \delta^3$$

(N ist die Anzahl der Wassertropfchen vom mittleren Durchmesser δ in der Naßdampfmenge G) ergibt sich folgende Darstellung für O' :

$$O' = V' \frac{6}{\delta}. \quad (57)$$

Nun führen wir gemäß Gl. (16) den spezifischen Dampfgehalt x ein. Wenn wir beachten, daß das Gesamtgewicht G der betrachteten Naßdampfmenge während der Verdampfung konstant bleibt, finden wir für die substanzielle Änderung von G'' :

$$\frac{DG''}{dt} = G \frac{Dx}{dt} = G w \frac{dx}{dz}. \quad (58)$$

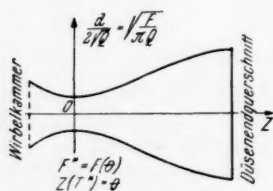


Abb. 4

(57) und (58) in (56) eingesetzt, führt dann auf

$$\varepsilon = \frac{G}{V'} \cdot \frac{\delta}{6} w \frac{dx}{dz}. \quad (59)$$

Den Faktor G/V' berechnen wir mit Hilfe der Gln. (1), (14) und (16), die ja allgemeine Gültigkeit besitzen und nicht auf die Zustände im Speicher beschränkt sind. Wir erhalten

$$\frac{G}{V'} = \frac{\gamma'}{1-x}, \quad (60)$$

womit wir dann (56) nach einer kleinen Umordnung die Gestalt

$$dz = \frac{\delta \gamma'}{6 \varepsilon} \cdot \frac{w dx}{1-x} \quad (61)$$

geben können. (61) stellt eine Differentialgleichung für die Abhängigkeit $T = T(z)$ der Temperatur von der Ortskoordinate z dar. Kennt man diese, so kann man die gesuchte Düsenform $F = F(z)$ aus der Kontinuitätsgleichung ermitteln:

$$F(z) = Q \cdot \frac{v(T(z))}{w(T(z))}. \quad (62)$$

Das spezifische Volumen v sowie die Geschwindigkeit w sind dabei natürlich längs der Adiabate zu nehmen. Bringen wir nun noch Gl. (61) auf eine Form, die der graphischen bzw. numerischen Behandlung angepaßt ist. Wir schreiben statt (61)

$$dz = - \frac{\delta \gamma'}{6 \varepsilon} \cdot w \frac{d}{dT} \ln(1-x) \cdot dT. \quad (63)$$

Schließlich berechnen wir noch den Ausdruck $(1-x)$ mittels Gl. (40). Das ergibt:

$$(1-x) = \frac{T}{r} (s'' - s_1) \quad (64)$$

und nach erfolgter Rücksubstitution in (63)

$$dz = - \frac{\delta \gamma'}{6 \varepsilon} \cdot w \frac{d}{dT} \ln \frac{T}{r} (s'' - s_1) \cdot dT. \quad (65)$$

Wir wollen nun die vereinfachende Annahme treffen, daß der Faktor $\frac{\delta \gamma'}{6 \varepsilon}$

hinreichend konstant ist. ε , das experimentell zu bestimmen ist, wird ohnehin nur als Mittelwert zu erhalten sein; und bei dem Produkt $\delta \gamma'$ heben sich die Abweichungen seiner Faktoren zumindest teilweise weg, da δ im Verlauf der Expansion ab-, γ' jedoch zunimmt. Um sicher zu gehen, daß wir keine zu große Oberflächenbelastung in die Rechnung einführen, wählen wir am besten für γ' den Wert am Düsenendquerschnitt, also

$$\gamma' = \gamma_2'. \quad (66)$$

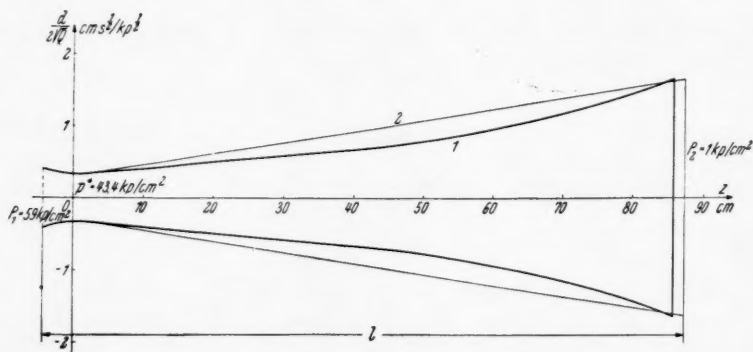
Unter diesen Voraussetzungen können wir nunmehr Gl. (65) in der Form

$$z = - \frac{\delta \gamma_2'}{6 \varepsilon} \int_{T^*}^T w \frac{d}{dT} \ln \frac{T}{r} (s'' - s_1) dT \quad (67)$$

schreiben. Das Integral

$$\int_{T^*}^T w \frac{d}{dT} \ln \frac{T}{r} (s'' - s_1) dT$$

wird man wohl am günstigsten graphisch auswerten. Die gesuchte Düsenform ergibt sich dann, wie bereits erwähnt, aus Gl. (62). Dies wurde für einen Speicheranfangsdruck P_0 von 100 kp/cm^2 sowie für eine Druckdifferenz ($P_0 - P_1$) zwischen Speicher und Wirbelkammer von 5 kp/cm^2 durchgeführt; der verwendete Wert von ε erscheint durch Versuche von O. LINNE [16] hinreichend gesichert. Das Ergebnis ist in Tafel IV festgehalten; es stellt den Meridianschnitt der gesuchten Schubdüse dar, mit denselben Koordinaten, wie sie in Abb. 4 eingeführt wurden.



Tafel IV. 1. Schubdüse mit konstantem $\varepsilon = 0,33 \text{ kp/m}^2\text{s}$ über die gesamte Düsenlänge. 2. Kegelförmige Ersatzdüse mit gleichem, mittlerem $\varepsilon = 0,33 \text{ kp/m}^2\text{s}$ (gemittelt über die gesamte Düsenlänge)

Zu dieser Düsenform muß allerdings noch einiges bemerkt werden: Die trompetenartige Erweiterung der Düse bürgt zwar für volle Ausnützung des zulässigen ε in jedem Querschnitt; je ausgeprägter aber die Trompetenform wird, um so weniger ist man berechtigt, die Düsenströmung mit Hilfe der Stromfadentheorie zu behandeln. Das ist natürlich kein Argument, das gegen die Verwendung trompetenartig erweiterter Düsen ins Treffen geführt werden kann; es wäre vielmehr als sträflich zu bezeichnen, eine schlecht konstruierte Düse mit der großen Bequemlichkeit, welche die Stromfadentheorie nun einmal dem Techniker bietet, entschuldigen oder gar rechtfertigen zu wollen. Die Tatsache, die gegen trompetenartig erweiterte Düsen spricht, ist eine ganz andere: Von einer Schubdüse verlangt man, daß sie einen Gasstrahl erzeugt, dessen Stromlinien (zumindest unmittelbar hinter dem Düsenendquerschnitt) möglichst parallel zueinander sind. Eine solche „Parallelstrahldüse“ [17] (wobei zunächst auf die Zusatzbedingung konstanter Zustände über den Düsenendquerschnitt verzichtet werden soll) ergibt nämlich den größten Schub unter allen Düsen mit gleichem Mengendurchsatz und gleicher (mittlerer) Ausströmgeschwindigkeit. Die Parallelstrahldüse ist nun nicht trompetenförmig erweitert, sondern im Prinzip nach dem in Abb. 4 skizzierten Meridianschnitt gestaltet. Es erhebt sich nun die Frage, ob nicht eine kegelförmig erweiterte Düse, die zweifellos große fabrikatorische Vorteile bietet, eine tragbare Kompromißlösung zwischen Parallelstrahldüse und trompetenförmig erweiterter Düse mit konstantem ε darstellt. Freilich muß auch bei einer solchen Kompromißlösung die zulässige Oberflächenbelastung ε Richtschnur für die Auslegung bleiben. Wir wollen daher von Gl. (61) ausgehen. Etwas umgeformt lautet diese:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\delta \gamma'}{6 \varepsilon} \cdot \frac{w}{1 - x}. \quad (68)$$

Für die lokale Größe dz/dx , also den Differentialquotienten, setzen wir nun einen mittleren Wert, den Differenzenquotienten, gebildet aus den entsprechenden Größen im Düsenendquerschnitt und in der Wirbelkammer. Das heißt also: An Stelle von dz/dx tritt der Ausdruck

$$\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}. \quad (69)$$

Die Differenz $z_2 - z_1$ bedeutet nun nichts anderes als die gesamte Länge l der Schubdüse. Somit gewinnen wir aus (68) als Bedingung für die Mindestlänge einer kegelförmig erweiterten Schubdüse die Formel

$$l = \frac{\delta \gamma_2'}{6 \varepsilon} \cdot \frac{w_m}{1 - x_m} (x_2 - x_1). \quad (70)$$

w_m und x_m bedeuten hier geeignete Mittelwerte der Strömungsgeschwindigkeit und des Dampfgehaltes zwischen Wirbelkammer und Düsenendquerschnitt. Gleichzeitig wurde Gl. (66) berücksichtigt. Die Wahl der Mittelwerte w_m und x_m unterliegt natürlich bis zu einem gewissen Grad der Willkür. Der Einfachheit halber verwenden wir in unserem Falle die arithmetische Mittelwertbildung. Es wird dann

$$w_m = \frac{1}{2} w_2 \quad (71)$$

(bei Vernachlässigung der Strömungsgeschwindigkeit w_1 in der Wirbelkammer gegen die Ausströmgeschwindigkeit w_2) und

$$x_m = \frac{1}{2} (x_2 + x_1). \quad (72)$$

Führt man (71) und (72) in (70) ein, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$l = \frac{\delta \gamma_2'}{6 \varepsilon} \cdot \frac{x_2 - x_1}{2 - (x_2 + x_1)} w_2. \quad (73)$$

Nach dieser Formel wurde eine kegelförmige Schubdüse für die schon auf S. 173 angegebenen Speicher- und Wirbelkammerzustände berechnet, und das Ergebnis zum Vergleich in Tafel IV mit eingezeichnet. Wie man sieht, sind die Abweichungen der beiden Meridianschnitte voneinander — zumindest in dem vorliegenden Spezialfall — nicht bedeutend. Das dürfte jedoch bei allen Schubdüsen, die auf normalen Außendruck ($P_a = 1 \text{ kp/cm}^2$) entspannen, der Fall sein. Es wird sich also empfehlen, die einfache Gl. (73) der viel unangenehmer zu handhabenden Gl. (67) bei der Dimensionierung von Schubdüsen vorzuziehen. Man wird aber — dies wurde schon öfter in dieser Arbeit betont — bei der Auslegung von Schubdüsen, die auf sehr geringen Außendruck expandieren, besondere Vorsicht walten lassen müssen, damit das nicht unbeträchtlich größere Enthalpiegefälle, das in solchen Fällen prinzipiell zur Verfügung steht, auch möglichst vollständig ausgenutzt wird.

Literaturverzeichnis

1. H. H. KÖLLE, Über die Wirtschaftlichkeit von Wasserdampfkraketen als Horizontal-Starthilfen. München: R. Oldenbourg, 1955; daselbst weitere Literaturangaben.
2. E. SÄNGER, Heißwasser-Raketen als wirtschaftliche Starthilfen. Luftfahrt-techn. 1, Nr. 4 (1955).
3. H. GRÖBER und S. ERK, Grundgesetze der Wärmeübertragung, 3. Aufl. von U. GRIGULL, S. 313 ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1955.

4. FR. A. WILLERS, Methoden der praktischen Analysis, S. 295 ff. Berlin: W. de Gruyter, 1928.
5. E. KAMKE, Differentialgleichungen, Band I, S. 154 ff. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1944.
6. O. FRENZL, Strömung verdampfenden Wassers in Düsen. Maschinenbau u. Wärmewirtschaft **11**, 11, 45 (1956).
7. F. MAGYAR, Die Reibung bei der ebenen Wirbelsenkströmung. Maschinenbau u. Wärmewirtschaft **9**, 341 (1954).
8. F. MAGYAR, Stromfunktionen für räumliche Wirbelsenken. Österr. Ing.-Arch. **9**, 24 (1955).
9. A. FÖRSTER, Untersuchung des Ausströmvorganges siedender Flüssigkeiten. Abh. dtsh. kältetechn. Ver. Nr. 10, S. 40. Karlsruhe: C. F. Müller, 1955.
10. L. PRANDTL, Strömungslehre, S. 304 ff. Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1949.
11. R. BRUNIAK und F. MAGYAR, Düsen zum Zerstäuben von Flüssigkeiten. Radex-Rundschau **1952**, 3.
12. GEIGER-SCHEEL, Handbuch der Physik, Bd. VII, S. 393 ff. Berlin: Springer, 1927.
13. R. BECKER, Theorie der Wärme, S. 195 ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1955.
14. AUERBACH-HORT, Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik, Bd. VII, S. 1 ff. Leipzig: J. A. Barth, 1929.
15. L. PRANDTL, l. c., S. 259 ff.
16. O. LINNE, Der Durchfluß siedender Flüssigkeiten durch Drosselrohre und Mündungen. Abh. dtsh. kältetechn. Ver. Nr. 10, S. 86 ff. Karlsruhe: C. F. Müller, 1955.
17. K. OSWATITSCH, Gasdynamik, S. 310 ff. Wien: Springer, 1952.

Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus

Jahrbuch 1955 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e.V. (WGL). Mit den Vorträgen der WGL-Tagung in Augsburg vom 12. bis 15. Oktober 1955. Herausgegeben von H. BLENK. Mit 474 Textabb., 360 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1956. Geb. DM 48.—.

Das Jahrbuch 1955 der WGL umfaßt 41 Vorträge, die auf der Augsburger Tagung gehalten wurden. Naturgemäß stehen bei einer Luftfahrertagung Themen aus der Aerodynamik — Strömung um Deltaflügel, Ringflügel, Strahlklappen, schallnahe Strömung, Interferenz, um nur einige zu nennen — im Vordergrund. Zwei zusammenfassende Referate geben einen Überblick über neue Ergebnisse und Entwicklungsmöglichkeiten in der theoretischen Gasdynamik (R. SAUER) bzw. über die Aerodynamik des Tragflügels im Unter- und Überschall (E. TRUCKENBRODT). Einen fast ebenso breiten Raum nehmen die Vorträge über Flugzeugsteuerung ein; hier sei ein zusammenfassender Bericht über Probleme der automatischen Steuerung (K. H. DOETSCH, Farnborough) besonders vermerkt. Die übrigen Vorträge beschäftigen sich mit Fragen der Versuchstechnik, Triebwerkstheorie, Flugmechanik, Statik, Werkstoffkunde und Meteorologie sowie mit allgemeineren Problemen (Rechtsfragen, Lärmschutz u. a.). Es ist an dieser Stelle leider nicht möglich, alle Beiträge einzeln zu würdigen; als Beispiel sei daher nur der Bericht über einen bei der S.N.E.C.M.A., Paris, entwickelten Windkanaltyp angeführt, der mit Strahlantrieb arbeitet und bei relativ geringen Erstellungskosten und Ladeleistungen besonders für Versuche an Triebwerken geeignet ist (O. FRENZL). Insgesamt gibt das Jahrbuch einen guten, wenn auch nicht erschöpfenden Einblick in alle Forschungsgebiete, die für die heutige Luftfahrttechnik von Interesse sind; es erscheint dadurch wohl geeignet, der deutschen Luftfahrtforschung nach dem Wunsche des Herausgebers neue Freunde zu gewinnen. Darüber hinaus wird auch derjenige, der die Luftfahrt als Vorstufe der Raumfahrt ansieht, in dem Jahrbuch manche Anregungen finden.

H. STÜMKE, Stuttgart

Jahrbuch 1956 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e.V. (WGL). Herausgegeben von H. BLENK. Schriftleitung: W. SCHULZ. Mit 297 Textabb., XIX, 247 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1957. Geb. DM 38.—.

Das Jahrbuch 1956 der WGL enthält vierzehn Vorträge, die bei verschiedenen Veranstaltungen der WGL oder verwandter Gesellschaften gehalten wurden, sowie fünf Arbeiten, die zum Preisausschreiben 1955 der WGL eingereicht wurden. Auf dem aerodynamischen Sektor finden sich ein einführender Vortrag über Probleme des Fluges mit hohen Geschwindigkeiten, mehrere Originalarbeiten zur Strömung an Flügel-Rumpf-Kombinationen und komplizierter geformten Tragflügeln sowie zwei zusammenfassende Vorträge über Grenzschichtbeeinflussung durch Ansaugen bzw. Abblasen. Flugmechanischen Stabilitätsproblemen sind zwei spezielle Untersuchungen gewidmet. Ein Vortrag über die praktische Anwendung moderner Darstellungsmethoden der Thermochemie leitet über zu mehreren Artikeln über Triebwerksfragen, die sich vor allem an den Turbinenfachmann wenden. Mit dem Strahlärm als wissenschaftlichem und technischem Problem beschäftigt sich ein weiterer Bericht, dem auch ein umfangreiches Verzeichnis der einschlägigen Literatur beigelegt ist. Steuerungsfragen werden im vorliegenden Jahrbuch nicht behandelt. Dagegen ist die Statik mit einer größeren Abhandlung über die Verwendung der Matrizen-

theorie zur rationellen Berechnung von Flugzeugtragwerken vertreten; die Methode ist der Arbeitsweise elektronischer Rechenmaschinen angepaßt und durch ein entsprechendes Beispiel illustriert. Drei weitere Aufsätze befassen sich mit der Entwicklung von kerbfreien Flugzeugteilen. Randgebiete der Luftfahrttechnik kommen schließlich in einem Vortrag über Luftbildmessung sowie in einer Untersuchung über besondere Rechtsfragen zur Sprache. Insgesamt bietet das Jahrbuch dem an der Luftfahrt interessierten Forscher und Ingenieur wieder eine Fülle von Anregungen und praktisch verwertbaren Ergebnissen und reiht sich damit ebenbürtig den vorangehenden Bänden dieser Serie an.

H. STÜMKE, Stuttgart

Leitfaden der Fernlenkung. Eine systematische Zusammenstellung der Verfahren und Anlagen der Fernlenkung. Von F. MÜLLER. (Ausschuß für Funkortung. Lehrbücherei der Funkortung: Band 2.) Mit 100 Textabb., 17 Tafeln, 200 S. Garmisch-Partenkirchen: Deutsche Radar-Verlagsgesellschaft m. b. H. 1955. Geb. DM 24.—.

Bis jetzt war in der Literatur kein Werk vorhanden, das einen Überblick über das gesamte Gebiet der Fernlenkung gibt. Das vorliegende Buch ist ein Versuch, einen solchen zu vermitteln, und man darf wohl sagen, daß dieser Versuch glänzend gelungen ist. Der Verfasser hat sich der mühevollen Aufgabe unterzogen, alle erreichbaren Unterlagen zu sammeln und in systematischer Sichtung auszuwerten. Da er selbst während des 2. Weltkrieges an hervorragender Stelle an der Entwicklung der Fernlenkung mitwirkte, war er zu dieser Arbeit besonders berufen. Mit diesem Buch wird vieles von dem besonderen deutschen Erfahrungsschatz von gestern, das unbedingt wichtig für die zukünftige Entwicklung ist, der Vergessenheit entrückt.

Trotz des sehr großen Tatsachenmaterials ist es dem Verfasser gelungen, das Buch auf mäßigem Umfang zu halten. Elektronische Einzelheiten allgemeiner Art, die bei der Verstärkung usw. eine Rolle spielen und in der Fachwelt allgemein bekannt sind, werden nicht erwähnt, wodurch das Buch an Übersicht gewinnt.

In Teil 1 wird eine systematische Einteilung der ferngelenkten Objekte gegeben ohne Rücksicht auf ihre derzeitige Realisierbarkeit oder ihr Vorhandensein in der bisherigen Entwicklung. In Teil 2 werden dann die Probleme und Verfahren der Fernlenkung behandelt und insbesondere die fernmeldetechnischen Aufgabenstellungen und Lösungsmöglichkeiten betrachtet. Im dritten Teil sind Einzelheiten über einige Fernlenkanlagen der deutschen Entwicklung bis 1945 bekanntgegeben. Viele der in diesem Teil angeführten Einzelheiten wurden vom Verfasser lediglich aus dem Gedächtnis wiedergegeben und erheben daher Anspruch nur auf Richtigkeit der grundsätzlichen Anordnung und der Größenordnung. Das angeschlossene Schriftenverzeichnis ist sehr ausgedehnt und enthält außer speziellen Veröffentlichungen und Berichten über das behandelte Sondergebiet auch eine Reihe allgemeiner Arbeiten.

Die Fülle der angeführten Einzelheiten enthält vieles, das einmal auch für die Weltraumfahrt von großer Bedeutung werden kann. Der Raummangel verbietet ein näheres Eingehen darauf. Zusammenfassend sei jedoch hervorgehoben, daß mit diesem Buch ein Vakuum in der Literatur ausgefüllt wird, so daß es jedem Interessierten auf diesem Gebiet empfohlen werden kann.

J. M. J. KOOP, Breda

Vol.
3
1957

On the Application of the Method of Variation of Elliptic Orbit Elements in Case of a Satellite Vehicle¹

By

J. M. J. Kooy², NVR

(With 11 Figures)

(Received May 1, 1956)

Abstract. In space flight we have to do with rocket vehicles travelling through the gravitational fields of the celestial bodies of the solar system. In case of chemical propulsion, the powered flight only covers a short range of the whole voyage, so that, throughout the major part of the trip the vehicle is freely coasting, behaving as a small celestial body. As long as the vehicle is in the neighbourhood of the earth, the terrestrial attraction will be overwhelming and in first approximation the freely coasting vehicle will describe a KEPLER motion. By the oblateness of the earth and the remaining very weak atmospheric drag at the altitudes coming into play, this KEPLER motion will be disturbed. As long as the vehicle remains in immediate neighbourhood of the earth the perturbations due to the gravitational influence of sun and moon will be insignificant in comparison to the influence of the terrestrial oblateness. Nevertheless, the solar and lunar disturbing force must be taken into account when a maximum accuracy will be required and the motion will be observed throughout years.

For deep space ships, freely coasting throughout the solar system, the solar attraction will be predominant and the ship will describe in first approximation a KEPLER motion around the sun.

In case of an electric space ship, a small thrust will be applied throughout the major part of the voyage. This small thrust can then also be considered as a perturbation, altering the instantaneous KEPLER motion around the sun.

In all cases mentioned above, the method of variation of orbit elements can be applied. The six elliptic orbit elements, determining the instantaneous KEPLER motion are then introduced as new dependent variables in the differential equations of motion, by which in the general case a system of six simultaneous differential equations of first order are obtained. This system can always be integrated by steps, applying the method of successive approximations.

In the article an outline is given of the determination of the six elliptical orbit elements of the instantaneous KEPLER motion of an artificial earth satellite and of the application of the method of variation of orbit elements, if the influences of the oblateness of the earth and the atmospheric drag, as well as the solar and lunar disturbing force are taken into account, more specially in connection with the purpose to use the satellite as a celestial tool for geophysic research. By measuring (by astronomical observation) the variation of elliptic orbit elements with time and comparing those measurements with the results of calculation based on different

¹ Presented at the VIIth International Astronautical Congress in Rome, September 19, 1956.

² Lector K. M. A., St. Ignatiusstraat 99a, Breda, Holland.

assumptions as to internal terrestrial mass distribution and atmospheric density, it will be possible to test these assumptions by experiment.

In similar way an unmanned artificial satellite revolving around the moon can be used for the research of the internal lunar mass distribution.

Zusammenfassung. In der Weltraumfahrt handelt es sich um Raketenfahrzeuge, die sich durch die Gravitationsfelder der Himmelskörper unseres Sonnensystems bewegen. Wenn chemische Treibmittel verwendet werden, wirkt der Antrieb nur im Anfang der Fahrt und das Fahrzeug bewegt sich frei gravitierend weiter. So lange sich das Fahrzeug dabei in der Nähe der Erde befindet, wird die Erdanziehung vorherrschen; es entsteht in erster Näherung eine KEPLER-Bewegung.

Durch die Abplattung der Erde und den auftretenden geringen Luftwiderstand wird diese KEPLER-Bewegung gestört. Die störenden Kräfte der Sonne und des Mondes werden — so lange das Fahrzeug in Erdnähe bleibt — viel geringer sein. Sie können aber nicht außer acht gelassen werden, wenn die Bewegung über Zeitstrecken von Jahren verfolgt wird und eine möglichst große Genauigkeit erzielt werden muß.

Im Falle eines frei gravitierenden Raumschiffes, das sich in größerer Entfernung im Sonnensystem bewegt, wird die Sonnenanziehung überwiegen; es wird in erster Näherung eine KEPLER-Bewegung um die Sonne beschreiben.

Beim elektrischen Raumschiff wird der Antrieb über einen großen Teil der Reise Strecke fort dauern. Da jedoch diese Antriebskraft gering ist, kann auch in diesem Fall die Bewegung in erster Linie als KEPLER-Bewegung aufgefaßt und der Antrieb als störende Kraft in Rechnung gezogen werden.

In allen oben genannten Beispielen kann die Methode der Variation der Bahnelemente angewendet werden. Die sechs elliptischen Bahnelemente, welche die augenblickliche KEPLER-Bewegung bestimmen, werden dann als neue, von der Zeit abhängige Veränderliche in die Bewegungsgleichungen eingeführt, wodurch ein System von sechs simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten wird. Dieses System kann immer nach der Methode der sukzessiven Näherungen integriert werden.

In der Arbeit wird schematisch angegeben, wie die sechs elliptischen Bahnelemente eines um die Erde umlaufenden künstlichen Mondes durch Beobachtung bestimmt werden können, und es wird kurz die Methode der Variation der Bahnelemente skizziert, wobei die störenden Einflüsse der Abplattung der Erde, der Anziehung von Sonne und Mond und des Luftwiderstandes in Betracht gezogen werden, mit der Absicht, den künstlichen Mond als anzeigendes Gerät für geophysikalische Forschung zu gebrauchen. Durch Beobachtung der Variation der Bahnelemente mit der Zeit und Vergleich dieser Beobachtungen mit den Resultaten der Rechnung bei verschiedenen angenommenen Massenverteilungen innerhalb der Erde und Dichteverteilungen innerhalb der Atmosphäre wird man imstande sein, diese Annahmen experimentell zu prüfen.

In gleicher Weise könnte ein unbemanntes, um den Mond laufendes Raumfahrzeug für die Erforschung der inneren Massenverteilung des Mondes verwendet werden.

Résumé. L'astronautique s'occupe de véhicules (fusées) se mouvant dans les champs de gravitation du système planétaire. Pour les fusées chimiques la propulsion fonctionne seulement pendant l'ascension; ayant obtenu la vitesse nécessaire au dessus de l'atmosphère, le véhicule continue sa trajectoire comme un corps céleste normal. Quand la terre est encore proche la pesanteur terrestre prédomine et le mouvement du véhicule sera presque képlérien. Ce mouvement est perturbé par l'influence de l'aplatissement terrestre et d'une faible résistance aérodynamique dans la haute atmosphère. Les perturbations dues à l'attraction du soleil et de la lune sont plus petites, mais il faut les envisager aussi quand on poursuit le mouvement pendant une période assez longue, et qu'une grande exactitude est exigée. A plus grande distance de la terre, dans le système planétaire, l'attraction du soleil est prédominante et le mouvement képlérien est perturbé par l'attraction des planètes. Pour une fusée électrique la force de réaction continue d'agir pendant la majeure partie du voyage; cependant, cette force est très faible et on peut pratiquement considérer le mouvement képlérien, perturbé par cette force et par l'attraction des planètes.

Dans tous les cas on peut employer la méthode de la variation des éléments elliptiques de l'orbite. On peut introduire les six éléments elliptiques, déterminant le mouvement keplérien instantané, comme variables nouvelles dépendant du temps dans les équations de mouvement, il en résulte un système de six équations différentielles simultanées du premier ordre. Il est toujours possible d'intégrer ce système au moyen de la méthode des approximations successives.

L'article décrit en principe la détermination par observation des six éléments elliptiques du mouvement keplérien instantané d'un satellite artificiel terrestre et l'application de la méthode des variations des éléments elliptiques, envisageant l'influence de l'aplatissement terrestre, de l'attraction du soleil et de la lune, et de la résistance aérodynamique, avec l'intention d'employer le satellite comme instrument céleste indicateur, pour la recherche géophysique. En observant les variations des éléments elliptiques et en comparant ces variations observées à celles calculées correspondant aux distributions supposées différentes de masse interne terrestre et de la densité atmosphérique il est possible de contrôler ces suppositions.

De la même manière, on peut employer un satellite artificiel sans équipage gravitant autour de la lune, pour explorer la distribution de masse interne lunaire.

Satellite around the Earth

1. Determination of initial spatial position and velocity components by observation

We consider the motion of an artificial satellite around the earth. The first question is how to determine the initial state of motion, hence the *initial spatial position* and *initial velocity* as to magnitude and direction. In the following: C = satellite vehicle, E = terrestrial observatory, S = earth-center. In order to indicate the motion of the vehicle, a rectangular system of reference is used, non rotating with respect to the celestial sky, with S as origin and the equator plane as $x y$ plane, so that the z axis coincides with the terrestrial axis of rotation. The coordinates of C with respect to this system are x, y and z .

Further, in order to indicate the position of C with respect to the observer E , a system of reference is used, non rotating with respect to the celestial sky, with E as origin and the axes parallel to the corresponding axes of the first called system with S as origin. The coordinates of C with respect to the system with E as origin are ξ, η and ζ . Then, if $EC = \rho$, we obtain:

$$\xi = \rho \lambda, \quad \eta = \rho \mu, \quad \zeta = \rho \nu, \quad (1)$$

if λ, μ and ν are the direction cosines of \overline{EC} with respect to the system $\xi \eta \zeta$. Hence (see Fig. 1): Or:

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \delta \cos \alpha = \rho \lambda & \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \eta &= \rho \cos \delta \sin \alpha = \rho \mu & \mu &= \cos \delta \sin \alpha \\ \zeta &= \rho \sin \delta = \rho \nu & \nu &= \sin \delta \end{aligned}$$

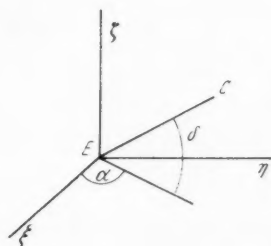


Fig. 1

The quantities λ, μ, ν can be found by direct observation at times t_1, t_2 and t_3 by measuring α (ascension) and δ (declination).

Now, because α and δ must be functions of $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ at some time, for instance time t_2 , in principle 3 celestial position measurements at 3 different times t_1, t_2 and t_3 are sufficient for determining completely the instantaneous KEPLER motion.

Hence let us assume that the quantities $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$, $\lambda_2 \mu_2 \nu_2$, $\lambda_3 \mu_3 \nu_3$ corresponding with t_1 , t_2 and t_3 are known, and that t_1 , t_2 and t_3 are chosen in such a way that $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$. Then, if the time lapse $t_2 - t_1$ is sufficiently small, we may write:

$$\dot{\lambda}_{1,2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}, \quad \dot{\lambda}_{2,3} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{t_3 - t_2}, \quad \ddot{\lambda}_3 = \frac{\dot{\lambda}_{2,3} - \dot{\lambda}_{1,2}}{\frac{1}{2}(t_3 - t_1)},$$

and

$$\dot{\lambda}_3 = \frac{\dot{\lambda}_{1,2} + \dot{\lambda}_{2,3}}{2},$$

and similar μ and ν .

Hence in this way the quantities $\lambda \dot{\lambda} \ddot{\lambda}$, $\mu \dot{\mu} \ddot{\mu}$, $\nu \dot{\nu} \ddot{\nu}$, at time $t = t_2$, become known.

Further the position of S with respect to system with E as origin is indicated by the coordinates X , Y and Z . Then:

$$x = \varrho \lambda - X, \quad y = \varrho \mu - Y, \quad z = \varrho \nu - Z. \quad (2)$$

Now

$$\ddot{x} = -\frac{k^2 x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{k^2 y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{k^2 z}{r^3} \quad (3)$$

in which $r = \overline{SC}$ and $k^2 = g_0 R^2$, if g_0 is the acceleration due to gravity at the terrestrial surface and R = radius of earth. If ω be the angular speed of rotation

of the earth and φ the latitude of the observer, we may write (see Fig. 2):

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos \varphi \cos \omega t \\ Y &= R \cos \varphi \sin \omega t \\ Z &= -R \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

In (4) the time $t = 0$ is chosen in such a way that then S is situated in the $\xi \zeta$ plane. Substituting (4) in (2), we obtain:

$$x = \varrho \lambda - R \cos \varphi \cos \omega t, \quad y = \varrho \mu - R \cos \varphi \sin \omega t, \quad z = \varrho \nu + R \sin \varphi. \quad (5)$$

Differentiating (5) with respect to t we obtain:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\varrho} \lambda + \varrho \dot{\lambda} + R \omega \cos \varphi \sin \omega t \\ \dot{y} &= \dot{\varrho} \mu + \varrho \dot{\mu} - R \omega \cos \varphi \cos \omega t \\ \dot{z} &= \dot{\varrho} \nu + \varrho \dot{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Again differentiating (6) with respect to t , we get:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{\varrho} \lambda + 2 \dot{\varrho} \dot{\lambda} + \varrho \ddot{\lambda} + R \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t \\ \ddot{y} &= \ddot{\varrho} \mu + 2 \dot{\varrho} \dot{\mu} + \varrho \ddot{\mu} + R \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t \\ \ddot{z} &= \ddot{\varrho} \nu + 2 \dot{\varrho} \dot{\nu} + \varrho \ddot{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

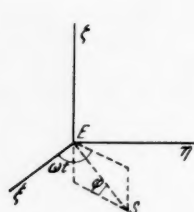


Fig. 2

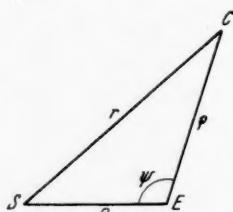


Fig. 3

Substituting (5) in combination with (3) in (7), we obtain:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varrho} \lambda + 2 \dot{\varrho} \dot{\lambda} + \varrho \ddot{\lambda} + R \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t_2 &= -\frac{k^2}{r^3} (\varrho \lambda - R \cos \varphi \cos \omega t_2) \\ \ddot{\varrho} \mu + 2 \dot{\varrho} \dot{\mu} + \varrho \ddot{\mu} + R \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t_2 &= -\frac{k^2}{r^3} (\varrho \mu - R \cos \varphi \sin \omega t_2) \\ \ddot{\varrho} \nu + 2 \dot{\varrho} \dot{\nu} + \varrho \ddot{\nu} &= -\frac{k^2}{r^3} (\varrho \nu + R \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

in which we have put $t = t_2$.

Further we have the geometrical relation (see Fig. 3):

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2 R \varrho \cos \varphi. \quad (9)$$

The quantity φ (now relating to $t = t_2$) can be found by direct observation. In (8) and (9), we have only as unknown quantities:

$\ddot{\varrho}$, $\dot{\varrho}$, ϱ and r (all relating to time $t = t_2$).

The system (8) is linear with respect to $\ddot{\varrho}$, $\dot{\varrho}$ and ϱ . Therefore let us rearrange (8) by writing:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varrho} \lambda + 2 \dot{\varrho} \dot{\lambda} + \varrho \left[\ddot{\lambda} + \frac{k^2 \lambda}{r^3} \right] &= -R \left[\omega^2 \cos \varphi \cos \omega t_2 - \frac{k^2}{r^3} \cos \varphi \cos \omega t_2 \right] \\ \ddot{\varrho} \mu + 2 \dot{\varrho} \dot{\mu} + \varrho \left[\ddot{\mu} + \frac{k^2 \mu}{r^3} \right] &= -R \left[\omega^2 \cos \varphi \sin \omega t_2 - \frac{k^2}{r^3} \cos \varphi \sin \omega t_2 \right] \\ \ddot{\varrho} \nu + 2 \dot{\varrho} \dot{\nu} + \varrho \left[\ddot{\nu} + \frac{k^2 \nu}{r^3} \right] &= -R \frac{k^2}{r^3} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

We have now to solve the quantities $\dot{\varrho}$, ϱ and r from (9) and (10). (For determining the quantities x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} at time $t = t_2$, we do not need $\ddot{\varrho}$). Therefore let us write:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \dot{\lambda} & \ddot{\lambda} + \frac{k^2 \lambda}{r^3} \\ \mu & \dot{\mu} & \ddot{\mu} + \frac{k^2 \mu}{r^3} \\ \nu & \dot{\nu} & \ddot{\nu} + \frac{k^2 \nu}{r^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \dot{\lambda} & \ddot{\lambda} \\ \mu & \dot{\mu} & \ddot{\mu} \\ \nu & \dot{\nu} & \ddot{\nu} \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda & \dot{\lambda} & \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t_2 - k^2 \frac{\cos \varphi \cos \omega t_2}{r^3} \\ \mu & \dot{\mu} & \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t_2 - k^2 \frac{\cos \varphi \sin \omega t_2}{r^3} \\ \nu & \dot{\nu} & \frac{k^2 \sin \varphi}{r^3} \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t_2 - k^2 \frac{\cos \varphi \cos \omega t_2}{r^3} & \ddot{\lambda} \\ \mu & \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t_2 - k^2 \frac{\cos \varphi \sin \omega t_2}{r^3} & \ddot{\mu} \\ \nu & \frac{k^2 \sin \varphi}{r^3} & \ddot{\nu} \end{vmatrix} \quad (13)$$

Then

$$\varrho = -R \frac{D_1}{D}, \quad (14)$$

$$\dot{\varrho} = -R \frac{D_2}{2D} \quad (15)$$

Now (9) and (14) only contain r and ϱ as unknown quantities, so that we can solve these unknowns from these two equations. Therefore, we estimate a value for r (by using the data of the pre-calculated orbit motion of the vehicle, at which is aimed by the prescribed time program of the automatic pilot during powered flight.) Then by (14) we can compute the corresponding value of ϱ . This value of ϱ can then be substituted in the right member of (9), which must then provide the same value of r on the left as estimated. This procedure must be repeated with different values of r , until both equations (14) and (9) are satisfied.

After having determined ϱ and r in this way, we find $\dot{\varrho}$ from (15) and consequently the quantities \dot{x} , \dot{y} and \dot{z} (for $t = t_2$) from (6) and x , y and z (for $t = t_2$) from (5).

2. The elliptic orbit elements

Let us indicate the attractive force by $K = -\frac{\mu^2 m}{r^2}$, in which $\mu^2 = f M = g_0 R^2$, f being the gravitation constant, M the mass of the earth, and m = mass of vehicle, whereas r denotes the distance from the center of attraction (= center of earth). Let at $t = 0$ the position of the vehicle be indicated by the radius vector $\bar{r}_0(r_0, \theta_0)$, with S as point $\bar{r} = 0$, and the speed of the vehicle by \bar{v}_0 , whereas $\angle(\bar{r}_0, \bar{v}_0) = \alpha$. Let us indicate the position of the vehicle in the orbital plane by polar coordinates r and θ . Then by the law of conservation of energy and by the second law of KEPLER (constant sector speed) we obtain directly as differential equations of first order:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{2\mu^2}{r} = v_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} \quad (16)$$

$$r^2 \dot{\theta} = v_0 r_0 \sin \alpha. \quad (17)$$

Now by (17):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{v_0 r_0 \sin \alpha}{r^2}, \quad \text{and} \quad r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2}.$$

Hence eliminating t between (16) and (17), we obtain as differential equation of the orbit:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^4} + \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2} - \frac{2\mu^2}{r} = v_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0}. \quad (18)$$

Separating in (18) the variables and integrating, we obtain:

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{-d\left(\frac{v_0 r_0 \sin \alpha}{r}\right)}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} - \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2} + \frac{2\mu^2}{r}}}.$$

Or:

$$\theta - \theta_0 = \arccos \frac{\frac{v_0 r_0 \sin \alpha}{r} - \frac{\mu^2}{v_0 r_0 \sin \alpha}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}}. \quad (19)$$

The integration constant θ_0 is defined by the initial condition that at $t = 0$, $\theta = \theta_a$. Hence:

$$\theta_0 = \theta_a - \arccos \frac{v_0 \sin \alpha - \frac{\mu^2}{v_0 r_0 \sin \alpha}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}}. \quad (20)$$

If we write the eq. (19) in the shape:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (21)$$

we obtain for p and ε :

$$p = \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu^2}, \quad (22)$$

$$\varepsilon = \frac{v_0 r_0 \sin \alpha}{\mu^2} \sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (23)$$

Further by the second law of KEPLER the time t corresponding with any value of θ is determined by:

$$t - t_0 = \frac{1}{v_0 r_0 \sin \alpha} \int r^2 d\theta = \frac{p^2}{v_0 r_0 \sin \alpha} \int \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}$$

in which $\varphi = \theta - \theta_0$. Carrying out the integration¹, we obtain:

$$\left. \begin{aligned} t - t_0 &= \frac{p^2}{v_0 r_0 \sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3}} (u - \varepsilon \sin u) \\ \text{in which } u &= 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

The integration constant t_0 is determined by the initial condition that at $t = 0$, $\theta = \theta_a$. Hence by (24):

$$\begin{aligned} t_0 = - \frac{p^2}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3} v_0 r_0 \sin \alpha} & \left[2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\theta_a - \theta_0}{2} \right) + \right. \\ & \left. - \varepsilon \sin 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\theta_a - \theta_0}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

From (21) it follows that the orbit is a conic section. Further it will be obvious that θ_0 is the angle included by the polar axis and the axis of the orbit passing through S (one of the foci) and that $t = t_0$ is the time of perigee passage. By the so known "elliptic orbit elements" p , ε , θ_0 and t_0 , the KEPLER motion in the orbit plane is defined completely.

¹ See J. M. J. KOOP and J. W. H. UYTENBOGAART, *Ballistics of the Future*, p. 150. Haarlem: The Technical Publishing Co. H. Stam, 1946.

In the three dimensional case also the position of the orbit plane must be indicated. Therefore we can use the inclination angle i included by the orbit plane and the $x y$ plane (equator plane) and an angle ψ , which defines the position of the line of intersection (line of apsides) of the orbit plane with the $x y$ plane. This line of apsides passes through S and is therefore completely defined by this angle ψ . Hence in the general (three dimensional) case the instantaneous KEPLER motion is completely determined by the 6 elliptic orbit elements $p, \varepsilon, \theta_0, t_0, i$ and ψ .

3. Determination of the elliptic orbit elements from the initial position and the initial speed

We have now to describe how the 6 orbit elements of the instantaneous KEPLER motion can be determined, if $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ are derived by observation for some time $t(=0)$ by the procedure explained above. Firstly we shall express x, y and z in the elliptic orbit elements. Let us assume that in the orbital plane the line of intersection of orbit plane and $x y$ plane is chosen as polar axis. Then, in this orbit plane:

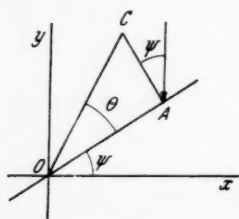


Fig. 4

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}, \quad (26)$$

in which $\phi = \theta - \theta_0$.

Let the angle included by the line of nodes (apsides) and the positive x direction be ψ and the angle of inclination (called "inclination") between orbit plane and $x y$ plane be i , in accordance with the previous notations. In Fig. 4, OA is the line of apsides, whereas the triangle OCA (with C = vehicle) is turned down (rotated about OA) in the plane of the figure. We then have:

$$\begin{aligned} x &= r (\cos \theta \cos \psi - \sin \theta \cos i \sin \psi) \\ y &= r (\cos \theta \sin \psi + \sin \theta \cos i \cos \psi) \\ z &= r \sin \theta \sin i \end{aligned}$$

in which $\theta = \phi + \theta_0$. Or introducing (26):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} [\cos (\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin (\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \\ y &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} [\cos (\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin (\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \\ z &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} [\sin (\phi + \theta_0) \sin i] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Now it follows from (24) in which by (22), $v_0 r_0 \sin \alpha = \sqrt{u^2 p} = \sqrt{p f M}$, that $\phi (= \varphi = \theta - \theta_0)$ is a function of p, ε, t_0 and t , which by (24) is given in implicate form. Let us write:

$$\phi = \phi(p, \varepsilon, t_0, t) \quad (24')$$

and

$$\left. \begin{aligned} x &= x(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi), & y &= y(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi), \\ z &= z(p, \varepsilon, \theta_0, i, \phi), & \text{in which } \phi &= \phi(p, \varepsilon, t_0, t) \end{aligned} \right\} \quad (27')$$

(Remark: it may be observed that z does not contain ψ , so that in the following \dot{z} does not contain $d\psi/dt$.)

We shall now derive the elliptic orbit elements $p, \epsilon, \theta_0, \psi, i$ and t_0 from the initial velocity $\bar{v}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ and position $\bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$. Now, if $\angle(\bar{v}_0, \bar{r}_0) = \alpha$, we can write:

$$v_0 r_0 \sin \alpha = |\bar{v}_0 \times \bar{r}_0| = \sqrt{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}}^2 = \sqrt{(\dot{y}_0 z_0 - \dot{z}_0 y_0)^2 + (\dot{z}_0 x_0 - \dot{x}_0 z_0)^2 + (\dot{x}_0 y_0 - \dot{y}_0 x_0)^2}. \quad (28)$$

Hence by (22):

$$p = \frac{(\dot{y}_0 z_0 - \dot{z}_0 y_0)^2 + (\dot{z}_0 x_0 - \dot{x}_0 z_0)^2 + (\dot{x}_0 y_0 - \dot{y}_0 x_0)^2}{\mu^2} \quad (29)$$

In (23) we have to substitute for $v_0 r_0 \sin \alpha$ the expression (28), whereas in (20):

$$v_0 \sin \alpha = \frac{1}{r_0} \sqrt{(\dot{y}_0 z_0 - \dot{z}_0 y_0)^2 + (\dot{z}_0 x_0 - \dot{x}_0 z_0)^2 + (\dot{x}_0 y_0 - \dot{y}_0 x_0)^2},$$

in which $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

In (20), θ_4 denotes the angle included by \bar{r}_0 and the line of apsides. This angle must still be determined, as well as the quantities ψ, i and t_0 . Let us write the equation of the orbit plane:

$$ax + by + z = 0. \quad (30)$$

This plane contains, besides the origin, the points:

$$(x_0, y_0, z_0) \quad \text{and} \quad (x_0 + \dot{x}_0, y_0 + \dot{y}_0, z_0 + \dot{z}_0).$$

Hence a and b follow from the equations:

$$ax_0 + by_0 = -z_0 \quad \text{and} \quad a(x_0 + \dot{x}_0) + b(y_0 + \dot{y}_0) = -(z_0 + \dot{z}_0).$$

Hence:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -z_0 & y_0 \\ -(z_0 + \dot{z}_0) & (y_0 + \dot{y}_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ (x_0 + \dot{x}_0) & (y_0 + \dot{y}_0) \end{vmatrix}} = \frac{y_0(z_0 + \dot{z}_0) - z_0(y_0 + \dot{y}_0)}{x_0(y_0 + \dot{y}_0) - y_0(x_0 + \dot{x}_0)} \quad (31)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & -z_0 \\ (x_0 + \dot{x}_0) & -(z_0 + \dot{z}_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ (x_0 + \dot{x}_0) & (y_0 + \dot{y}_0) \end{vmatrix}} = \frac{z_0(x_0 + \dot{x}_0) - x_0(z_0 + \dot{z}_0)}{x_0(y_0 + \dot{y}_0) - y_0(x_0 + \dot{x}_0)}$$

The line of intersection of the orbit plane with the xy plane is:

$$ax + by = 0, \quad \text{or} \quad y = -\frac{a}{b}x,$$

so that $\operatorname{tg} \psi = -a/b$. Or in connection with (31):

$$\psi = \arctg \frac{y_0(z_0 + \dot{z}_0) - z_0(y_0 + \dot{y}_0)}{x_0(z_0 + \dot{z}_0) - z_0(x_0 + \dot{x}_0)} \quad (32)$$

According to (30) the direction cosines of the normal of the orbit plane are:

$$\cos \alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos \beta_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Now i denotes the angle included by the orbit plane and the xy plane.

Hence $\gamma_1 = i$, so that by (31):

$$i = \arccos \cdot$$

$$\frac{x_0(y_0 + \dot{y}_0) - y_0(x_0 + \dot{x}_0)}{\sqrt{[y_0(z_0 + \dot{z}_0) - z_0(y_0 + \dot{y}_0)]^2 + [z_0(x_0 + \dot{x}_0) - x_0(z_0 + \dot{z}_0)]^2 + [x_0(y_0 + \dot{y}_0) - y_0(x_0 + \dot{x}_0)]^2}} \quad (33)$$

We obtain as direction cosines of the line of apsides:

$$\cos \alpha_2 = \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \beta_2 = \sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \frac{-\frac{a}{b}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Or in connection with (31):

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{z_0(x_0 + \dot{x}_0) - x_0(z_0 + \dot{z}_0)}{\sqrt{[y_0(z_0 + \dot{z}_0) - z_0(y_0 + \dot{y}_0)]^2 + [z_0(x_0 + \dot{x}_0) - x_0(z_0 + \dot{z}_0)]^2}} \\ \cos \beta_2 &= \frac{z_0(y_0 + \dot{y}_0) - y_0(z_0 + \dot{z}_0)}{\sqrt{[y_0(z_0 + \dot{z}_0) - z_0(y_0 + \dot{y}_0)]^2 + [z_0(x_0 + \dot{x}_0) - x_0(z_0 + \dot{z}_0)]^2}} \\ \cos \gamma_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

The direction cosines of \bar{r}_0 become:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_3 &= \frac{x_0}{r_0}, \quad \cos \beta_3 = \frac{y_0}{r_0}, \quad \cos \gamma_3 = \frac{z_0}{r_0} \\ \text{in which } r_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Further:

$$\cos \theta_a = \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3. \quad (36)$$

Hence according to (34), (35) and (36) we obtain:

$$\theta_a = \arccos \cdot$$

$$\frac{x_0 \{z_0(x_0 + \dot{x}_0) - x_0(z_0 + \dot{z}_0)\} + y_0 \{z_0(y_0 + \dot{y}_0) - y_0(z_0 + \dot{z}_0)\}}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \{ [y_0(z_0 + \dot{z}_0) - z_0(y_0 + \dot{y}_0)]^2 + [z_0(x_0 + \dot{x}_0) - x_0(z_0 + \dot{z}_0)]^2 \}}} \quad (37)$$

so that θ_0 is determined by (20) and (37).

Further t_0 follows from (25). According to (22) we may write:

$$p\mu^2 = pfM = v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha, \quad \text{or} \quad v_0 r_0 \sin \alpha = \sqrt{pfM}.$$

Hence we can write (25):

$$t_0 = \frac{-p^2}{\sqrt{pfM}(1-\varepsilon^2)^3} \left[2 \arccos \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\theta_a - \theta_0}{2} \right) + \right. \\ \left. - \varepsilon \sin 2 \arccos \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\theta_a - \theta_0}{2} \right) \right]. \quad (38)$$

Hence by (28), (29), (23), (20), (37), (38), (32) and (33), the 6 elliptic orbit elements $p, \varepsilon, \theta_0, t_0, \psi$ and i are expressed in terms of $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

4. General outline of the method of variation of elliptic orbit elements

We shall now further proceed by giving a general outline of the method of variation of orbit elements. The differential equations of motion of the satellite in rectangular coordinates $x y z$ may be written:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{f M x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + F_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \ddot{y} &= -\frac{f M y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + F_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \ddot{z} &= -\frac{f M z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + F_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

In (39) F_1 , F_2 and F_3 are the x , y and z component of the resulting specific disturbing force acting on the satellite, due to the oblateness of the earth, to the remaining air resistance and the disturbing influence of sun and moon. Hence we obtain in vector notation:

$$\bar{F} = \bar{F}_{\oplus} + \bar{F}_{atm} + \bar{F}_{\odot} + \bar{F}_{\zeta} \quad (40)$$

in which

\bar{F}_{\oplus} = specific disturbing force, due to oblateness of the earth.

\bar{F}_{atm} = specific disturbing force, due to aerodynamic drag.

\bar{F}_{\odot} = specific solar disturbing force.

\bar{F}_{ζ} = specific lunar disturbing force.

For simplicity's sake, we shall assume that the satellite is globular, so that the aerodynamic force is only a drag, having always the opposite direction of the relative speed of the satellite with respect to the atmospheric air. \bar{F}_{atm} will then be a function of $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, whereas the other disturbing forces only contain x, y, z and t . [The quantities $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$ (coordinates of the sun with respect to the geocentric system of reference) and as well the lunar coordinates x_{ζ}, y_{ζ} and z_{ζ} with respect to the geocentric system are considered here as given functions of time.] Hence the resulting specific disturbing force \bar{F} will be a function of $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, and t .

Now, let us write:

$$\dot{x} = \xi, \quad \dot{y} = \eta, \quad \dot{z} = \zeta \quad (41)$$

and let us write (39):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= f_1(x, y, z) + F_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) \\ \dot{\eta} &= f_2(x, y, z) + F_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) \\ \dot{\zeta} &= f_3(x, y, z) + F_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Now introducing (27') in (41) and (42), we can observe that as to the pure KEPLER motion (when $\bar{F} = 0$) the elliptic orbit elements $p, e, \theta_0, t_0, \psi$ and i are constant, so that then in (27') only ϕ (as function of t) varies. Hence, because the instantaneous KEPLER motion coincides with the actual motion, we obtain:

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \eta = \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \zeta = \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

so that as to the actual motion:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x \partial \phi}{\partial \phi \partial p}\right) \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial x \partial \phi}{\partial \phi \partial \varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \theta_0} \frac{d\theta_0}{dt} + \frac{\partial x \partial \phi}{\partial \phi \partial t_0} \frac{dt_0}{dt} + \frac{\partial x}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} = 0 \quad (43)$$

and similar for y and z .

Further, if the elliptic orbit elements remain constant, the components of the acceleration become:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Hence in connection with (42), we obtain as to the actual motion:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi \partial \phi}{\partial \phi \partial p}\right) \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \xi \partial \phi}{\partial \phi \partial \varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial \theta_0} \frac{d\theta_0}{dt} + \\ &+ \frac{\partial \xi}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \xi \partial \phi}{\partial \phi \partial t_0} \frac{dt_0}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} = F_1(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \end{aligned} \quad (44)$$

and similar for η and ζ .

(43) and (44) together constitute a system of 6 simultaneous linear differential equations of first order in the elliptic orbit elements $p, \varepsilon, \theta_0, t_0, \psi$ and i .

We shall now consider the derivation of the partial differential quotients.

$\frac{\partial \phi}{\partial p}, \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \phi}{\partial t_0}$, appearing in (43) and (44), and $\frac{\partial \phi}{\partial t}$.

According to the previous:

$$t - t_0 = \frac{p^2}{\sqrt{p f M}} \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2}, \quad (45)$$

so that:

$$1 = \frac{p^2}{\sqrt{p f M}} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

whence follows:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\sqrt{p f M}}{p^2} (1 + \varepsilon \cos \phi)^2. \quad (46)$$

Further:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_0} = - \frac{\sqrt{p f M}}{p^2} (1 + \varepsilon \cos \phi)^2. \quad (47)$$

Further we can write (45):

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{[1 + \varepsilon \cos \phi]^2} = p^{-3/2} \sqrt{f M} (t - t_0).$$

Hence:

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} \frac{\partial \phi}{\partial p} = - \frac{3}{2} p^{-5/2} \sqrt{f M} (t - t_0),$$

so that:

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = - \frac{3}{2} (1 + \varepsilon \cos \phi)^2 p^{-5/2} \sqrt{f M} (t - t_0). \quad (48)$$

Lastly, differentiating (45) with respect to ε we obtain:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} + \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} \right\} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Or:

$$-2 \int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^3} + \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} = 0,$$

so that:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} = 2 (1 + \varepsilon \cos \phi)^2 \int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^3}. \quad (49)$$

Now consider:

$$J = \int \frac{\cos \phi d\phi}{[1 + \varepsilon \cos \phi]^3}.$$

Assume $\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = u$. Then

$$\frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} = du = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}\right) d\frac{\phi}{2}.$$

Hence:

$$d\phi = \frac{2 du}{1 + u^2}.$$

Further:

$$\cos \phi = \frac{\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}{\cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Thus:

$$\begin{aligned} J &= 2 \int \frac{\frac{1 - u^2}{1 + u^2} \frac{2 du}{1 + u^2}}{\left[1 + \varepsilon \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right]^3} = 2 \int \frac{(1 + u^2)(1 - u^2) du}{[1 + u^2 + \varepsilon(1 - u^2)]^3} = \\ &= 2 \int \frac{(1 - u^4) du}{[1 + u^2 + \varepsilon - \varepsilon u^2]^3} = 2 \int \frac{(1 - u^4) du}{[1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon) u^2]^3} = \\ &= \frac{2}{(1 + \varepsilon)^3} \int \frac{(1 - u^4) du}{\left[1 + \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} u^2\right]^3} = \frac{2}{(1 + \varepsilon)^3} \int \frac{du}{\left[1 + \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} u^2\right]^3} + \\ &\quad - \frac{2}{(1 + \varepsilon)^3} \int \frac{u^4 du}{\left[1 + \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} u^2\right]^3}. \end{aligned}$$

Now assume

$$u = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{then} \quad du = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon \cos^2 \alpha}} \frac{d\alpha}{1-\varepsilon \cos^2 \alpha}, \quad \text{and}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} u^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha.$$

Hence:

$$J = \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} \int \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon \cos^2 \alpha}} \frac{d\alpha}{1-\varepsilon \cos^2 \alpha} \cos^6 \alpha +$$

$$- \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} \int \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \operatorname{tg}^4 \alpha \cos^6 \alpha \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon \cos^2 \alpha}} \frac{d\alpha}{1-\varepsilon \cos^2 \alpha}.$$

Or:

$$J = \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \int \cos^4 \alpha d\alpha - \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^5} \int \sin^4 \alpha d\alpha.$$

Hence we obtain:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{[1 + \varepsilon \cos \phi]^3} = \\ & = \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{4} \cos^3 \alpha \sin \alpha + \frac{3}{8} (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha) \right\} + \\ & - \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^5} \left\{ -\frac{1}{4} \sin^3 \alpha \cos \alpha + \frac{3}{8} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \right\} \\ & \text{in which } \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Hence $\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}$ is determined by (49) and (50).

Next, we have to determine the partial differential quotients:

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial x}{\partial \theta_0}, \frac{\partial x}{\partial i}, \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

and similar y and z , appearing in (43). By differentiation we find from (27):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} &= \frac{\cos(\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi}{1 + \varepsilon \cos \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial p} &= \frac{\cos(\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi}{1 + \varepsilon \cos \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial p} &= \frac{\sin(\phi + \theta_0) \sin i}{1 + \varepsilon \cos \phi} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Further:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \phi} &= \frac{- (1 + \varepsilon \cos \phi) [\sin (\phi + \theta_0) \cos \psi + \cos (\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] + [\cos (\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin (\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \varepsilon \sin \phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} p \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} &= \frac{(1 + \varepsilon \cos \phi) [-\sin (\phi + \theta_0) \sin \psi + \cos (\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] + [\cos (\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin (\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \varepsilon \sin \phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} p \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} &= \frac{(1 + \varepsilon \cos \phi) \cos (\phi + \theta_0) \sin i + \sin (\phi + \theta_0) \sin i \cdot \varepsilon \sin \phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} p \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Now,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (1 + \varepsilon \cos \phi)^{-1} = - (1 + \varepsilon \cos \phi)^{-2} \cos \phi = - \frac{\cos \phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2}.$$

Hence:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} &= - \frac{p \cos \phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} [\cos (\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin (\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \\ \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} &= - \frac{p \cos \phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} [\cos (\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin (\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \\ \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} &= - \frac{p \cos \phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} \sin (\phi + \theta_0) \sin i \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial i} &= \frac{\sin (\phi + \theta_0) \sin i \sin \psi}{1 + \varepsilon \cos \phi} p \\ \frac{\partial y}{\partial i} &= \frac{-\sin (\phi + \theta_0) \sin i \cos \psi}{1 + \varepsilon \cos \phi} p \\ \frac{\partial z}{\partial i} &= \frac{\sin (\phi + \theta_0) \cos i}{1 + \varepsilon \cos \phi} p \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta_0} &= - p \frac{\sin (\phi + \theta_0) \cos \psi + \cos (\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi}{1 + \varepsilon \cos \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_0} &= p \frac{-\sin (\phi + \theta_0) \sin \psi + \cos (\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi}{1 + \varepsilon \cos \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_0} &= p \frac{\cos (\phi + \theta_0) \sin i}{1 + \varepsilon \cos \phi} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \psi} &= - p \frac{\cos (\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin (\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi}{1 + \varepsilon \cos \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} &= p \frac{\cos (\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin (\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi}{1 + \varepsilon \cos \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \psi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Further we have by the foregoing:

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \eta = \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \zeta = \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

in which

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\sqrt{p f M}}{p^2} (1 + \varepsilon \cos \phi)^2 \quad [\text{See (46)}].$$

Hence by (52):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \left\{ (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\sin(\phi + \theta_0) \cos \psi - \cos(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] + \right. \\ &\quad \left. + [\cos(\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \varepsilon \sin \phi \right\} \\ \eta &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \left\{ (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\sin(\phi + \theta_0) \sin \psi + \cos(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] + \right. \\ &\quad \left. + [\cos(\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \varepsilon \sin \phi \right\} \\ \zeta &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \left\{ (1 + \varepsilon \cos \phi) \cos(\phi + \theta_0) \sin i + \sin(\phi + \theta_0) \sin i \cdot \varepsilon \sin \phi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

By differentiation of (57), we have now to compute the partial differential coefficients

$$\frac{\partial \xi}{\partial p}, \frac{\partial \xi}{\partial \phi}, \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \theta_0}, \frac{\partial \xi}{\partial i}, \frac{\partial \xi}{\partial \psi}$$

and similar η and ζ , appearing in the eqs. (44).

Now

$$\frac{\sqrt{p f M}}{p} = \sqrt{f M} p^{-1/2},$$

so that:

$$\sqrt{f M} \frac{\partial}{\partial p} p^{-1/2} = -\frac{1}{2} \sqrt{f M} p^{-3/2}.$$

Hence:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial p} &= -\frac{1}{2} \sqrt{f M} p^{-3/2} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\sin(\phi + \theta_0) \cos \psi + \\ &\quad - \cos(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] + [\cos(\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cdot \\ &\quad \cdot \cos i \sin \psi] \varepsilon \sin \phi \} \\ \frac{\partial \eta}{\partial p} &= -\frac{1}{2} \sqrt{f M} p^{-3/2} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\sin(\phi + \theta_0) \sin \psi + \cos(\phi + \theta_0) \cdot \\ &\quad \cdot \cos i \cos \psi] + [\cos(\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \varepsilon \sin \phi \} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial p} &= -\frac{1}{2} \sqrt{f M} p^{-3/2} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) \cos(\phi + \theta_0) \sin i + \sin(\phi + \theta_0) \cdot \\ &\quad \cdot \sin i \cdot \varepsilon \sin \phi \} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Further:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial \phi} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ (-\varepsilon \sin \phi) [-\sin(\phi + \theta_0) \cos \psi - \cos(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] + \\
 &\quad + (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\cos(\phi + \theta_0) \cos \psi + \sin(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] + \\
 &\quad + [\cos(\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \varepsilon \cos \phi + \\
 &\quad + [-\sin(\phi + \theta_0) \cos \psi - \cos(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \varepsilon \sin \phi \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \phi} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ (-\varepsilon \sin \phi) [-\sin(\phi + \theta_0) \sin \psi + \cos(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] + \\
 &\quad + (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\cos(\phi + \theta_0) \sin \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] + \\
 &\quad + [-\sin(\phi + \theta_0) \sin \psi + \cos(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \varepsilon \sin \phi + \\
 &\quad + [\cos(\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \varepsilon \cos \phi \\
 \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ (-\varepsilon \sin \phi) \cos(\phi + \theta_0) \sin i - (1 + \varepsilon \cos \phi) \sin(\phi + \theta_0) \sin i + \\
 &\quad + \cos(\phi + \theta_0) \sin i \cdot \varepsilon \sin \phi + \sin(\phi + \theta_0) \sin i \cdot \varepsilon \cos \phi \}
 \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ \cos \phi [-\sin(\phi + \theta_0) \cos \psi - \cos(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] + \\
 &\quad + [\cos(\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \sin \phi \} \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ \cos \phi [-\sin(\phi + \theta_0) \sin \psi + \cos(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] + \\
 &\quad + [\cos(\phi + \theta_0) \sin \psi + \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \sin \phi \} \\
 \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ \cos \phi \cos(\phi + \theta_0) \sin i + \sin(\phi + \theta_0) \sin i \sin \phi \}
 \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial \theta_0} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\cos(\phi + \theta_0) \cos \psi + \sin(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] + \\
 &\quad + [-\sin(\phi + \theta_0) \cos \psi - \cos(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \varepsilon \sin \phi \} \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_0} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\cos(\phi + \theta_0) \sin \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] + \\
 &\quad + [-\sin(\phi + \theta_0) \sin \psi + \cos(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \varepsilon \sin \phi \}
 \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \zeta}{\partial \theta_0} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ -(1 + \varepsilon \cos \phi) \sin(\phi + \theta_0) \sin i + \cos(\phi + \theta_0) \sin i \cdot \varepsilon \sin \phi \} \\
 \frac{\partial \xi}{\partial i} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) \cos(\phi + \theta_0) \sin i \sin \psi + \sin(\phi + \theta_0) \sin i \sin \psi \cdot \\
 &\quad \cdot \varepsilon \sin \phi \} \\
 \frac{\partial \eta}{\partial i} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) (-\cos(\phi + \theta_0) \sin i \cos \psi) + \\
 &\quad - \sin(\phi + \theta_0) \sin i \cos \psi \varepsilon \sin \phi \} \\
 \frac{\partial \zeta}{\partial i} &= \frac{\sqrt{p f M}}{p} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) \cos(\phi + \theta_0) \cos i + \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cdot \varepsilon \sin \phi \}
 \end{aligned} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} &= \frac{\sqrt{\rho f M}}{\rho} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) [\sin(\phi + \theta_0) \sin \psi - \cos(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] + \\ &\quad + [-\cos(\phi + \theta_0) \sin \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cos i \cos \psi] \varepsilon \sin \phi \} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \psi} &= \frac{\sqrt{\rho f M}}{\rho} \{ (1 + \varepsilon \cos \phi) [-\sin(\phi + \theta_0) \cos \psi - \cos(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] + \\ &\quad + [\cos(\phi + \theta_0) \cos \psi - \sin(\phi + \theta_0) \cos i \sin \psi] \varepsilon \sin \phi \} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

The expressions (52), (53) ... to (63) must then be substituted in the left members of (43) and (44).

5. Disturbing force due to the oblateness of the earth

Let us consider the earth as non homogeneous rotation ellipsoid bounded by the surface:

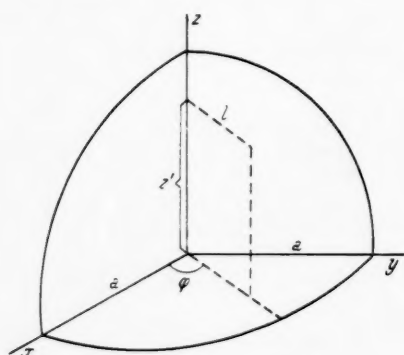


Fig. 5

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (64)$$

Let us denote any particle of the ellipsoid by the coordinates z', φ and l (Fig. 5). [Then, if x', y' and z' are the rectangular coordinates of the particle, $x' = l \cos \varphi$, $y' = l \sin \varphi$, $z' = z'$.]

We shall assume that the density distribution of matter is axial symmetric with respect to the z axis. The mass of an elementary particle can then be represented by $\rho(z', l) l d\varphi dl dz'$, in which ρ denotes the spatial mass density.

The gravitational force of this particle on the unit of mass in a spatial point $x y z$ outside the ellipsoid in x direction then becomes:

$$\begin{aligned} & \frac{f \rho(z', l) l d\varphi dl dz' (x' - x)}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{f \rho(z', l) l d\varphi dl dz' (l \cos \varphi - x)}{[(l \cos \varphi - x)^2 + (l \sin \varphi - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

For the y and z component we obtain similar expressions.

Hence we get as components of the specific gravitational force (acting on the unit of mass in x, y, z direction) of the whole rotation ellipsoid with axial symmetric density distribution:

$$\left. \begin{aligned} F_{x\oplus} &= \iiint \frac{f \rho(z', l) (l \cos \varphi - x) l d\varphi dl dz'}{[(l \cos \varphi - x)^2 + (l \sin \varphi - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} \\ F_{y\oplus} &= \iiint \frac{f \rho(z', l) (l \sin \varphi - y) l d\varphi dl dz'}{[(l \cos \varphi - x)^2 + (l \sin \varphi - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} \\ F_{z\oplus} &= \iiint \frac{f \rho(z', l) (z' - z) l d\varphi dl dz'}{[(l \cos \varphi - x)^2 + (l \sin \varphi - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

in which the triple integrals must be extended throughout the volume included by the boundary surface (64). We then have:

Integration limits with respect to $z' \rightarrow -c$ and $+c$.

Integration limits with respect to $\varphi \rightarrow 0$ and 2π .

Further the integration limits with respect to l follow from the meridian section:

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

so that $l_{1,2} = 0 \rightarrow +a \sqrt{1 - \frac{z'^2}{c^2}}$. Hence we obtain as complete expressions for F_x , F_y and F_z :

$$\left. \begin{aligned} F_{x\oplus} &= \int_{z'=-c}^{z'=+c} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{l=0}^{l=+a\sqrt{1-\frac{z'^2}{c^2}}} \frac{f\varrho(z', l) (l \cos \varphi - x) l d\varphi dl dz'}{[(l \cos \varphi - x)^2 + (l \sin \varphi - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} \\ F_{y\oplus} &= \int_{z'=-c}^{z'=+c} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{l=0}^{l=+a\sqrt{1-\frac{z'^2}{c^2}}} \frac{f\varrho(z', l) (l \sin \varphi - y) l d\varphi dl dz'}{[(l \cos \varphi - x)^2 + (l \sin \varphi - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} \\ F_{z\oplus} &= \int_{z'=-c}^{z'=+c} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{l=0}^{l=+a\sqrt{1-\frac{z'^2}{c^2}}} \frac{f\varrho(z', l) (z' - z) l d\varphi dl dz'}{[(l \cos \varphi - x)^2 + (l \sin \varphi - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

The disturbing forces $F_{1\oplus}$, $F_{2\oplus}$ and $F_{3\oplus}$, due to the oblateness of the earth, which must be introduced in (44) then become:

$$\left. \begin{aligned} F_{1\oplus} &= + \frac{f M x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + F_{x\oplus}(x, y, z) \\ F_{2\oplus} &= + \frac{f M y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + F_{y\oplus}(x, y, z) \\ F_{3\oplus} &= + \frac{f M z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + F_{z\oplus}(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

If we substitute in these equations for x , y and z the expressions (27), we obtain:

$$\left. \begin{aligned} F_{1\oplus} &= F_{1\oplus}(\rho, \theta_0, \varepsilon, i, \psi, \phi) \\ F_{2\oplus} &= F_{2\oplus}(\rho, \theta_0, \varepsilon, i, \psi, \phi) \\ F_{3\oplus} &= F_{3\oplus}(\rho, \theta_0, \varepsilon, i, \psi, \phi) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

The computation of the triple integrals (66) can only be performed numerically. This can be carried out as follows. Let us write in (66) the expressions under the \iiint sign, $f_1(z', \varphi, l)$, $f_2(z', \varphi, l)$ and $f_3(z', \varphi, l)$. As to the integration with respect to l , z' and φ behave as constants, so that we may write:

$$\int_{l=0}^{l=+a\sqrt{1-\frac{z'^2}{c^2}}} f_1(z', \varphi, l) dl = \int_{l=0}^{l=+a\sqrt{1-\frac{z'^2}{c^2}}} f_1(l) dl. \quad (69)$$

We can now replace the function $f(l)$ by:

$$\varphi_1(l) = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{n \neq k} (l - l_n)}{\prod_{n \neq k} (l_k - l_n)} f_1(l_k), \quad \left. \begin{array}{l} \prod_{n \neq k} (l - l_n) = (l - l_1) (l - l_2) \dots (l - l_{k-1}) (l - l_{k+1}) \dots (l - l_n) \\ \prod_{n \neq k} (l_k - l_n) = (l_k - l_1) (l_k - l_2) \dots (l_k - l_{k-1}) (l_k - l_{k+1}) \dots (l_k - l_n) \end{array} \right\} \quad (70)$$

in which:

$$\begin{aligned} \prod_{n \neq k} (l - l_n) &= (l - l_1) (l - l_2) \dots (l - l_{k-1}) (l - l_{k+1}) \dots (l - l_n) \\ \prod_{n \neq k} (l_k - l_n) &= (l_k - l_1) (l_k - l_2) \dots (l_k - l_{k-1}) (l_k - l_{k+1}) \dots (l_k - l_n) \end{aligned}$$

This function $\varphi_1(l)$ has the same function values $f(l_k)$ as $f(l)$ in the points $l = l_k$ ($k = 1, 2, 3 \dots n$), which must be chosen in suitable way throughout the integration interval:

$$l = 0 \rightarrow l = +a \sqrt{1 - \frac{z'^2}{c^2}}.$$

By increasing the number of points $l = l_k$, we can obtain an approximation as accurate as required.

Carrying out the multiplication in (70), we obtain $\varphi(l)$ as series of rising powers of l , so that we get by substitution in (69) integrals of the type

$$\int l^n dl = \frac{1}{n+1} l^{n+1}.$$

In this way we find

$$l = +a \sqrt{1 - \frac{z'^2}{c^2}} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{z'^2}{c^2}}} f_1(l) dl = \psi(z', \varphi). \quad (71)$$

This procedure must be carried out for many value sets z', φ , so that the surface $\psi = \psi(z', \varphi)$ in ψ, z', φ space¹ becomes known. Subsequently we obtain as integration with respect to φ :

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \psi(z', \varphi) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \psi(\varphi) d\varphi \quad (72)$$

in which z' behaves as a constant.

Therefore we replace $\psi(\varphi)$ by the integrable function:

$$\chi(\varphi) = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{n \neq k} (\varphi - \varphi_n)}{\prod_{n \neq k} (\varphi_k - \varphi_n)} \psi(\varphi_k), \quad (73)$$

in which the collocation points are chosen throughout the integration interval $\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 2\pi$. We then obtain for (72):

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \psi(\varphi) d\varphi = \eta(z'). \quad (74)$$

This procedure must be carried out for different values of z' . (Thereby, as to any value of z' , we obtain another set of φ values, hence another function

¹ In this space, ψ, z' and φ are thought as rectangular space coordinates.

$\psi = \psi(\varphi)$, as intersection of the surface $\psi = \psi(z', \varphi)$ with the plane at distance z' from the origin, perpendicular to the z' axis in $\psi z' \varphi$ space.) Then further we obtain:

$$F_{x\oplus} = \int_{z'=-c}^{z'=+c} \eta(z') dz' \quad (75)$$

For carrying out the integration (75), we can replace $\eta(z')$ by

$$\zeta(z') = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{n \neq k} (z' - z_n')}{\prod_{n \neq k} (z_k' - z_n')} \eta(z_k') \quad (76)$$

in which the collocation points are chosen throughout the integration interval:

$$z' = -c \rightarrow z' = +c.$$

We then obtain for (75):

$$F_{x\oplus} = \int_{z'=-c}^{z'=+c} \zeta(z') dz', \quad (77)$$

which can be integrated directly.

6. Solar disturbing force

Let us indicate the coordinates of the sun with respect to the geocentric system by x_\odot , y_\odot , z_\odot . By the attraction of the sun, the earth obtains an acceleration into solar direction, of which the components are:

$$\frac{f M_\odot x_\odot}{(x_\odot^2 + y_\odot^2 + z_\odot^2)^{3/2}}, \quad \frac{f M_\odot y_\odot}{(x_\odot^2 + y_\odot^2 + z_\odot^2)^{3/2}}, \quad \text{and} \quad \frac{f M_\odot z_\odot}{(x_\odot^2 + y_\odot^2 + z_\odot^2)^{3/2}}$$

in which M_\odot denotes the solar mass. Hence the specific solar force acting on the artificial earth satellite is equal to the geometric difference of the direct specific solar attraction on the satellite and the specific solar attraction by which the satellite would be acted upon if it were placed at the terrestrial center. Hence the components of the solar disturbing force become:

$$F_{1\odot} = f M_\odot \left\{ \frac{x_\odot - x}{[(x_\odot - x)^2 + (y_\odot - y)^2 + (z_\odot - z)^2]^{3/2}} + \frac{x_\odot}{[x_\odot^2 + y_\odot^2 + z_\odot^2]^{3/2}} \right\} \quad (78)$$

and similar $F_{2\odot}$ and $F_{3\odot}$.

In (78), x_\odot , y_\odot and z_\odot may be considered as given functions of t . Further, by substituting in (78) for x , y and z the expressions (27), we find:

$$\left. \begin{aligned} F_{1\odot} &= F_{1\odot}(p, \varepsilon, \theta_0, \psi, i, \phi, t) \\ F_{2\odot} &= F_{2\odot}(p, \varepsilon, \theta_0, \psi, i, \phi, t) \\ F_{3\odot} &= F_{3\odot}(p, \varepsilon, \theta_0, \psi, i, \phi, t) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

7. Lunar disturbing force

Let us indicate the coordinates of the moon with respect to the geocentric system by x_ℓ , y_ℓ , z_ℓ . By the attraction of the moon, the earth obtains an acceleration in lunar direction, of which the components are:

$$\frac{f M_\ell x_\ell}{[x_\ell^2 + y_\ell^2 + z_\ell^2]^{3/2}}, \quad \frac{f M_\ell y_\ell}{[x_\ell^2 + y_\ell^2 + z_\ell^2]^{3/2}}, \quad \text{and} \quad \frac{f M_\ell z_\ell}{[x_\ell^2 + y_\ell^2 + z_\ell^2]^{3/2}}$$

in which M_{ℓ} denotes the lunar mass. Hence the components of the specific lunar disturbing force become:

$$F_{1\ell} = f M_{\ell} \left[\frac{x_{\ell} - x}{[(x_{\ell} - x)^2 + (y_{\ell} - y)^2 + (z_{\ell} - z)^2]^{3/2}} - \frac{x_{\ell}}{[x_{\ell}^2 + y_{\ell}^2 + z_{\ell}^2]^{3/2}} \right] \quad (80)$$

and similar for $F_{2\ell}$ and $F_{3\ell}$.

In (80), x_{ℓ} , y_{ℓ} and z_{ℓ} may be considered as given functions of t . Further, by substituting (27) in (80), we obtain:

$$\left. \begin{aligned} F_{1\ell} &= F_{1\ell}(p, \epsilon, \theta_0, \psi, i, \phi, t) \\ F_{2\ell} &= F_{2\ell}(p, \epsilon, \theta_0, \psi, i, \phi, t) \\ F_{3\ell} &= F_{3\ell}(p, \epsilon, \theta_0, \psi, i, \phi, t) \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

8. Disturbing force due to atmospheric drag

The satellite will move in a region, in which by the high gas temperature, despite the low gas density, the speed of sound will be of the same order of magnitude as the orbital speed of the satellite. Hence let us write for the specific atmospheric drag (per unit of mass) acting on the satellite:

$$W = c_w(v', \rho_{atm}(x, y, z)) \rho_{atm}(x, y, z) F \frac{v'^2}{2} \quad (82)$$

in which $F = \pi R^2$ if R = radius of globular satellite vehicle and $\rho_{atm}(x, y, z)$ = atmospheric density at point x, y, z occupied by the vehicle at the moment in question. Further in (82), v' denotes the relative speed of the satellite with respect to the surrounding air, whereas the factor c_w is a function of v' and $\rho_{atm}(x, y, z)$.

The geocentric system of reference $x y z$ (see above) is a non rotating system, O (the origin) coinciding with the terrestrial center and the $x y$ plane coinciding with the equator plane (see Fig. 6).

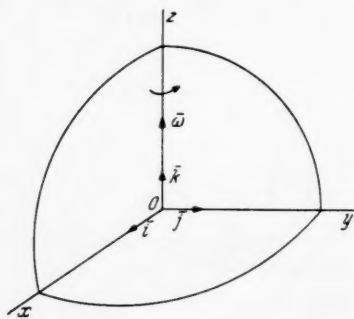


Fig. 6

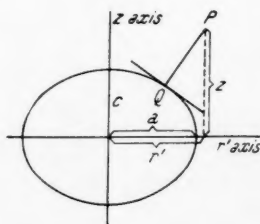


Fig. 7

Then, if \bar{v} be the speed of the satellite and $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ its radius vector, the speed of the atmospheric gas, due to the rotation of the earth, at place \bar{r} becomes:

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar{i}(-y\omega) + \bar{j}\omega x.$$

Then the speed of the satellite at place \bar{r} with respect to the surrounding atmospheric gas becomes:

$$\bar{v} - \bar{v}_1 = \bar{i}(\dot{x} + y\omega) + \bar{j}(\dot{y} - \omega x) + \bar{k}\dot{z}. \quad (83)$$

Now we may further write in vector notation:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{|\bar{v} - \bar{v}_1|} c_w \left(|\bar{v} - \bar{v}_1|, \varrho_{atm}(\bar{r}) \right) \varrho_{atm}(\bar{r}) \frac{F}{2} |\bar{v} - \bar{v}_1|^2 = \\ &= (\bar{v}_1 - \bar{v}) |\bar{v} - \bar{v}_1| c_w \left(|\bar{v} - \bar{v}_1|, \varrho_{atm}(\bar{r}) \right) \varrho_{atm}(\bar{r}) \frac{F}{2} = \\ &= (\bar{v}_1 - \bar{v}) \sqrt{(\dot{x} + y\omega)^2 + (\dot{y} - \omega x)^2 + \dot{z}^2} \cdot \varrho_{atm}(\bar{r}) \varrho_{atm}(\bar{r}) \frac{F}{2}. \end{aligned} \quad (84)$$

Or in components:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= -(\dot{x} + y\omega) \sqrt{\dots} \cdot c_w \left(\sqrt{\dots}, \varrho_{atm}(x, y, z) \right) \varrho_{atm}(x, y, z) \frac{F}{2} \\ W_y &= (\omega x - \dot{y}) \sqrt{\dots} \cdot c_w \left(\sqrt{\dots}, \varrho_{atm}(x, y, z) \right) \varrho_{atm}(x, y, z) \frac{F}{2} \\ W_z &= -\dot{z} \sqrt{\dots} \cdot c_w \left(\sqrt{\dots}, \varrho_{atm}(x, y, z) \right) \varrho_{atm}(x, y, z) \frac{F}{2} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

in which $\sqrt{\dots} = \sqrt{(\dot{x} + y\omega)^2 + (\dot{y} - \omega x)^2 + \dot{z}^2}$.

Now the oblateness of the earth is about 1/300, so that this can result in a difference in altitude — with respect to constant r — of the order of $6350/300 \approx 20$ km. This may be considered too large as to be neglected. If we then again consider the earth as a rotation ellipsoid, and if we assume $\varrho = \varrho(h)$ as given, in which h denotes the altitude, we have — in order to determine $\varrho = \varrho(x, y, z)$ — to face the problem, how to determine the distance from a point $P(x, y, z)$ to the surface:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (86)$$

Now by the rotational symmetry of the earth we may write:

$$\varrho_{atm} = \varrho_{atm}(x, y, z) = \varrho_{atm}(r', z) \quad \text{in which} \quad r' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Fig. 7 represents a meridian section of the earth, the meridian circumference being defined by:

$$\frac{r'^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (87)$$

Drop from $P(r', z)$ a perpendicular PQ to the ellipse (87) and denote the coordinates of Q by r'_1 and z_1 . Then the equation of the tangent in Q becomes:

$$\frac{r'_1 r'}{a^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 1. \quad (88)$$

Further the direction cosines of the line \overline{PQ} are:

$$\cos \alpha = \frac{r' - r'_1}{PQ}, \quad \cos \beta = \frac{z - z_1}{PQ},$$

whereas \overline{PQ} is perpendicular to (88), so that:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_1'}{a^2} : \frac{z_1}{c^2} &= (r' - r_1') : (z - z_1) \\ \text{and } \frac{r_1'^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

from which r_1' and z_1 must be solved.

Now by (89₁):

$$\frac{r_1'}{a^2} z - \frac{r_1'}{a^2} z_1 = \frac{z_1}{c^2} (r' - r_1') \quad (90)$$

and by (89₂):

$$z_1 = c \sqrt{1 - \frac{r_1'^2}{a^2}}. \quad (91)$$

Substitution of (91) in (90) gives:

$$\frac{r_1'}{a^2} z - \frac{c}{a^2} r_1' \sqrt{1 - \frac{r_1'^2}{a^2}} = \frac{r' - r_1'}{c} \sqrt{1 - \frac{r_1'^2}{a^2}}.$$

Or:

$$\frac{r_1'}{a^2} z - \left[\frac{c}{a^2} r_1' + \frac{r' - r_1'}{c} \right] \sqrt{1 - \frac{r_1'^2}{a^2}} = 0. \quad (92)$$

r_1' must be solved from (92). Now the approximate value of r_1' is known. Disregarding the oblateness of the earth, we obtain:

$$r_1' \approx \frac{R r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = R \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}$$

in which R = (average) radius of earth.

Hence r_1' can be solved from (92) by simple trying, and any required accuracy can be obtained by enclosing in two limits.

In (92), $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$, so that r_1' is found as function of x, y, z . Then further:

$$h = \sqrt{(r' - r_1')^2 + (z - z_1)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1' \right)^2 + \left(z - c \sqrt{1 - \frac{r_1'^2}{a^2}} \right)^2},$$

so that also by this procedure h is found numerically as function of x, y and z , and thereby also $\varrho_{atm} = \varrho_{atm}(x, y, z)$ is found numerically. Further we have then to introduce in (85) for x, y and z the expressions (27) and for $\dot{x} = \xi, \dot{y} = \eta, \dot{z} = \zeta$ the expressions (57). We then find:

$$\left. \begin{aligned} W_x &\equiv F_{1atm} = F_{1atm}(\rho, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi) \\ W_y &\equiv F_{2atm} = F_{2atm}(\rho, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi) \\ W_z &\equiv F_{3atm} = F_{3atm}(\rho, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

If we now introduce (68), (79), (81) and (93) in the eqs. (44) and if we solve the system (43), (44), which is linear in

$$\frac{d\rho}{dt}, \frac{d\varepsilon}{dt}, \frac{d\theta_0}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d\psi}{dt} \text{ and } \frac{d\phi}{dt},$$

with respect to those time derivatives, we obtain:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \chi_1(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, t_0, \phi, t) \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \chi_2(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, t_0, \phi, t) \\ \frac{d\theta_0}{dt} &= \chi_3(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, t_0, \phi, t) \\ \frac{dt_0}{dt} &= \chi_4(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, t_0, \phi, t) \\ \frac{di}{dt} &= \chi_5(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, t_0, \phi, t) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \chi_6(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, t_0, \phi, t) \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

9. Solution of the system (94) by the method of successive approximations

Let us denote the initial state by $p_a, \varepsilon_a, \theta_{0a}, i_a, \psi_a, t_{0a}$. Then we have as zero approximation:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_a, & \varepsilon &= \varepsilon_a, & \theta_0 &= \theta_{0a} \\ i &= i_a, & \psi &= \psi_a, & t_0 &= t_{0a} \end{aligned} \right\}$$

Then we obtain as first approximation:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_a + \int_0^t \chi_1(p_a, \varepsilon_a, \theta_{0a}, i_a, \psi_a, t_{0a}, \phi(p_a, \varepsilon_a, t_{0a}, t), t) dt = p_1(t) \\ \varepsilon &= \varepsilon_a + \int_0^t \chi_2(p_a, \varepsilon_a, \theta_{0a}, i_a, \psi_a, t_{0a}, \phi(p_a, \varepsilon_a, t_{0a}, t), t) dt = \varepsilon_1(t) \\ \theta_0 &= \theta_{0a} + \int_0^t \chi_3(p_a, \varepsilon_a, \theta_{0a}, i_a, \psi_a, t_{0a}, \phi(p_a, \varepsilon_a, t_{0a}, t), t) dt = \theta_{01}(t) \\ t_0 &= t_{0a} + \int_0^t \chi_4(p_a, \varepsilon_a, \theta_{0a}, i_a, \psi_a, t_{0a}, \phi(p_a, \varepsilon_a, t_{0a}, t), t) dt = t_{01}(t) \\ i &= i_a + \int_0^t \chi_5(p_a, \varepsilon_a, \theta_{0a}, i_a, \psi_a, t_{0a}, \phi(p_a, \varepsilon_a, t_{0a}, t), t) dt = i_1(t) \\ \psi &= \psi_a + \int_0^t \chi_6(p_a, \varepsilon_a, \theta_{0a}, i_a, \psi_a, t_{0a}, \phi(p_a, \varepsilon_a, t_{0a}, t), t) dt = \psi_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

The second approximation then becomes:

$$\left. \begin{aligned}
 p &= p_a + \\
 &+ \int_0^t \chi_1(p_1(t), \varepsilon_1(t), \theta_{0_1}(t), i_1(t), \psi_1(t), t_{0_1}(t), \phi(p_1(t), \varepsilon_1(t), t_{0_1}(t), t), t) dt = p_2(t) \\
 \varepsilon &= \varepsilon_a + \\
 &+ \int_0^t \chi_2(p_1(t), \varepsilon_1(t), \theta_{0_1}(t), i_1(t), \psi_1(t), t_{0_1}(t), \phi(p_1(t), \varepsilon_1(t), t_{0_1}(t), t), t) dt = \varepsilon_2(t) \\
 \theta_0 &= \theta_{0_a} + \\
 &+ \int_0^t \chi_3(p_1(t), \varepsilon_1(t), \theta_{0_1}(t), i_1(t), \psi_1(t), t_{0_1}(t), \phi(p_1(t), \varepsilon_1(t), t_{0_1}(t), t), t) dt = \theta_{0_1}(t) \\
 t_0 &= t_{0_a} + \\
 &+ \int_0^t \chi_4(p_1(t), \varepsilon_1(t), \theta_{0_1}(t), i_1(t), \psi_1(t), t_{0_1}(t), \phi(p_1(t), \varepsilon_1(t), t_{0_1}(t), t), t) dt = t_{0_1}(t) \\
 i &= i_a + \\
 &+ \int_0^t \chi_5(p_1(t), \varepsilon_1(t), \theta_{0_1}(t), i_1(t), \psi_1(t), t_{0_1}(t), \phi(p_1(t), \varepsilon_1(t), t_{0_1}(t), t), t) dt = i_2(t) \\
 \psi &= \psi_a + \\
 &+ \int_0^t \chi_6(p_1(t), \varepsilon_1(t), \theta_{0_1}(t), i_1(t), \psi_1(t), t_{0_1}(t), \phi(p_1(t), \varepsilon_1(t), t_{0_1}(t), t), t) dt = \psi_2(t) \\
 &\text{Etc.}
 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

The integrations must again be carried out numerically, for which the same general method can be applied as described above.

10. The artificial satellite as tool for geophysics research

The disturbing forces \bar{F}_\odot and \bar{F}_ζ can be sharply computed, whereas \bar{F}_\oplus is only known to a moderate degree of accuracy (considering the equatorial protuberance as homogeneous). Further, on the base of our present knowledge, \bar{F}_{atm} can only be estimated approximately. If the lowest point of the orbit is at sufficient altitude, \bar{F}_{atm} can be neglected entirely. Then, computing \bar{F}_\oplus for different assumed distributions $\varrho = \varrho(z', l)$, we can compare the results of computation with the results of observation. Thereby, because a maximum possible accuracy is required, \bar{F}_\odot and \bar{F}_ζ , although small in comparison to \bar{F}_\oplus , must be taken into account, so that the influence of \bar{F}_\oplus can be found separately. In this way, different assumed distributions $\varrho = \varrho(z', l)$ can be tested by observation of the orbital motion.

This combined computational and observational method of investigation of the terrestrial internal mass distribution with the satellite as indicating tool will be laborious and will require much time. However, this last feature does not represent a principal difficulty, for the satellite at sufficient altitude in all points of the orbit will practically have an eternal life.

In principle, the atmospheric drag can be examined in similar way. In case of lower altitude vehicles \bar{F}_{atm} will be overwhelming in comparison to \bar{F}_{\odot} , and the inaccuracy of our knowledge about the last disturbing force will be no barrier. On the other hand, in order to investigate the very small atmospheric drag at higher altitudes, it will be required that firstly \bar{F}_{\odot} is investigated more completely by means of satellite vehicles of very large minimum altitude.

For the rest, an internal terrestrial mass distribution in accordance with the satellite motion can in first approximation be determined as follows.

Divide the terrestrial volume in $3n$ parts. n must be large, so that the volume elements are small. Assume that the mass of any volume element is concentrated in its center, so that we obtain $3n$ material points m_i , having fixed coordinates x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, 3n$). Because the earth is axial symmetric with respect to the axis of rotation, the terrestrial rotation does not come into play.

Applying the procedure described above, we can determine the quantities $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$ and \dot{z} at n different times t_1, t_2, \dots, t_n . We may then write:

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{n \neq k} (t - t_n)}{\prod_{n \neq k} (t_k - t_n)} \dot{x}(t_k),$$

from which $\ddot{x}(t)$ follows by differentiation. We then obtain:

$$\ddot{x} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{f m_i (x_i - x)}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2]^{3/2}} + F_{1\odot} + F_{1\epsilon} \left\{ \right.$$

and similar for \ddot{y} and \ddot{z}

in which for $F_{1\odot}$ and $F_{1\epsilon}$ the expressions (78) and (80) must be substituted, whereas the drag is assumed zero.

Now we know by observation \ddot{x}, \ddot{y} and \ddot{z} at n spatial points x, y, z corresponding with t_1, t_2, \dots, t_n , so that we obtain $3n$ linear equations in the unknown quantities m_1, m_2, \dots, m_{3n} , which can be solved.

11. Satellite vehicle around the Moon

By suitable initial conditions, after a short tangential impulse, starting from a circular orbit about the earth, it will be possible to establish a satellite vehicle around the moon. Such a lunar satellite will certainly be realized in a more remote future. This vehicle — unmanned — and even not equipped with whatever apparatus, can then be used for investigation of the lunar internal mass distribution, in similar way as described above as to the terrestrial internal mass distribution.

In the lunar case, there is no air resistance, but if the orbital motion is close to the moon, the KEPLER motion (with the moon as center of attraction) will in the first place be disturbed by the oblong shape of the moon, whereas further, if a great accuracy is required, also the perturbations of the earth and the sun can be taken into account. The solar and terrestrial perturbations can be computed with great exactness, whereas, in order to determine the perturbation due to the oblong lunar shape, an internal mass distribution of the moon must be assumed, while further also the axial lunar rotation must be accounted for.

On the other hand, in order to control the computed motion by observation, we are faced with the problem how to determine the elliptic orbit elements of the instantaneous lunar satellite KEPLER motion. Therefore, again three celestial position determinations at three different times are required.

We shall now shortly indicate the different steps, in order to carry out this program.

12. *Determination of orbit of artificial satellite around the Moon, by three spherical position measurements from a terrestrial station at latitude φ*

Introduce 1⁰) a geocentric system. The xy plane of this system coincides with the equator plane and the origin with the center E of the earth. The coordinates of the moon with respect to this system are:

$$x_\ell, y_\ell, z_\ell, \quad \text{whereas} \quad r_\ell = \sqrt{x_\ell^2 + y_\ell^2 + z_\ell^2}.$$

The z axis coincides with the terrestrial axis of rotation. The geocentric system does not rotate with respect to the celestial sky.

Further introduce 2⁰) an observatory centric system, non rotating with respect to the celestial sky, with the terrestrial station as origin. The coordinates of the moon satellite as to this system of reference are:

$$\xi, \eta, \zeta, \quad \text{whereas} \quad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Let us write:

$$\xi = \lambda \varrho, \quad \eta = \mu \varrho, \quad \zeta = \nu \varrho. \quad (97)$$

The quantities $\lambda, \mu, \nu, \dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\nu}, \ddot{\lambda}, \ddot{\mu}, \ddot{\nu}$ can then be derived again from three spherical position measurements as already described above.

3⁰) introduce a selenocentric system of reference, with the moon center as origin.

The corresponding axial directions of the three mentioned systems of coordinates are the same, and \bar{i}, \bar{j} and \bar{k} the unit vectors in these axial directions. The coordinates of the moon satellite as to the last called system are:

$$x_s, y_s, z_s, \quad \text{whereas} \quad r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}.$$

Now we have:

$$\ddot{x}_\ell = -\frac{k^2 x_\ell}{r_\ell^3}, \quad \ddot{y}_\ell = -\frac{k^2 y_\ell}{r_\ell^3}, \quad \ddot{z}_\ell = -\frac{k^2 z_\ell}{r_\ell^3} \quad (98)$$

$$\ddot{x}_s = -\frac{k_s^2 x_s}{r_s^3}, \quad \ddot{y}_s = -\frac{k_s^2 y_s}{r_s^3}, \quad \ddot{z}_s = -\frac{k_s^2 z_s}{r_s^3} \quad (99)$$

in which

$$k^2 = f \frac{M + M_\ell}{M_\ell} \quad \text{and} \quad k_s^2 = f M_\ell.$$

Further if we denote the coordinates of the terrestrial station as to the geocentric system X, Y and Z , we obtain (see Fig. 8):

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos \varphi \cos \omega t \\ Y &= R \cos \varphi \sin \omega t \\ Z &= R \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Now if $\bar{r}_\ell = \bar{i} x_\ell + \bar{j} y_\ell + \bar{k} z_\ell$ and similar \bar{r}_s, \bar{R} and $\bar{\varrho}$, we obtain:

$$\bar{r}_\ell + \bar{r}_s - \bar{R} = \bar{\varrho}.$$

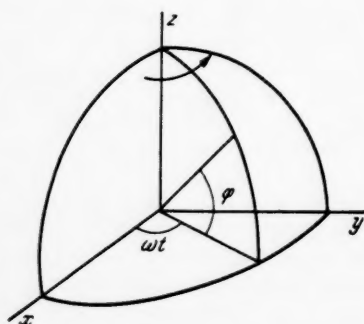


Fig. 8

Or in components:

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \varrho \lambda + X - x_\ell \\ y_s &= \varrho \mu + Y - y_\ell \\ z_s &= \varrho v + Z - z_\ell \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Hence:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_s &= \varrho \dot{\lambda} + \dot{\varrho} \lambda + \dot{X} - \dot{x}_\ell \\ \dot{y}_s &= \varrho \dot{\mu} + \dot{\varrho} \mu + \dot{Y} - \dot{y}_\ell \\ \dot{z}_s &= \varrho \dot{v} + \dot{\varrho} v + \dot{Z} - \dot{z}_\ell \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Now by (100):

$$\dot{X} = -R \omega \cos \varphi \sin \omega t, \quad \dot{Y} = R \omega \cos \varphi \cos \omega t, \quad \dot{Z} = 0 \quad (103)$$

so that:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_s &= \varrho \dot{\lambda} + \dot{\varrho} \lambda - R \omega \cos \varphi \sin \omega t - \dot{x}_\ell \\ \dot{y}_s &= \varrho \dot{\mu} + \dot{\varrho} \mu + R \omega \cos \varphi \cos \omega t - \dot{y}_\ell \\ \dot{z}_s &= \varrho \dot{v} + \dot{\varrho} v - \dot{z}_\ell \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Thus by (104), (98), (99), (100) and (101) we obtain:

$$\begin{aligned} \varrho \ddot{\lambda} + 2 \dot{\varrho} \dot{\lambda} + \lambda \ddot{\varrho} - R \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t &= \\ = -\frac{k^2}{r_\ell^3} x_\ell - \frac{k_s^2}{r_s^3} (\varrho \lambda + R \cos \varphi \cos \omega t - x_\ell) \\ \varrho \ddot{\mu} + 2 \dot{\varrho} \dot{\mu} + \mu \ddot{\varrho} - R \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t &= \\ = -\frac{k^2}{r_\ell^3} y_\ell - \frac{k_s^2}{r_s^3} (\varrho \mu + R \cos \varphi \sin \omega t - y_\ell) \\ \varrho \ddot{v} + 2 \dot{\varrho} \dot{v} + v \ddot{\varrho} &= -\frac{k^2}{r_\ell^3} z_\ell - \frac{k_s^2}{r_s^3} (\varrho v + R \sin \varphi - z_\ell). \end{aligned}$$

Or arranged with respect to $\ddot{\varrho}$, $\dot{\varrho}$ and ϱ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda \ddot{\varrho} + 2 \dot{\lambda} \dot{\varrho} + \left(\ddot{\lambda} + \frac{k_s^2}{r_s^3} \lambda \right) \varrho &= \\ = -\frac{k^2}{r_\ell^3} x_\ell - \frac{k_s^2}{r_s^3} (R \cos \varphi \cos \omega t - x_\ell) + R \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t \\ \mu \ddot{\varrho} + 2 \dot{\mu} \dot{\varrho} + \left(\ddot{\mu} + \frac{k_s^2}{r_s^3} \mu \right) \varrho &= \\ = -\frac{k^2}{r_\ell^3} y_\ell - \frac{k_s^2}{r_s^3} (R \cos \varphi \sin \omega t - y_\ell) + R \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t \\ v \ddot{\varrho} + 2 \dot{v} \dot{\varrho} + \left(\ddot{v} + \frac{k_s^2}{r_s^3} v \right) \varrho &= -\frac{k^2}{r_\ell^3} z_\ell - \frac{k_s^2}{r_s^3} (R \sin \varphi - z_\ell) \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Now let us write:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 \dot{\lambda} & \left(\ddot{\lambda} + \frac{k_s^2}{r_s^3} \lambda \right) \\ \mu & 2 \dot{\mu} & \left(\ddot{\mu} + \frac{k_s^2}{r_s^3} \mu \right) \\ v & 2 \dot{v} & \left(\ddot{v} + \frac{k_s^2}{r_s^3} v \right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \dot{\lambda} & \ddot{\lambda} \\ \mu & 2 \dot{\mu} & \ddot{\mu} \\ v & 2 \dot{v} & \ddot{v} \end{vmatrix} = D \quad (106)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2\dot{\lambda} & -\frac{k^2}{r_\ell^3} x_\ell \\ \mu & 2\dot{\mu} & -\frac{k^2}{r_\ell^3} y_\ell \\ \nu & 2\dot{\nu} & -\frac{k^2}{r_\ell^3} z_\ell \end{vmatrix} = D_1 \quad (107)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2\dot{\lambda} & -(R \cos \varphi \cos \omega t - x_\ell) \\ \mu & 2\dot{\mu} & -(R \cos \varphi \sin \omega t - y_\ell) \\ \nu & 2\dot{\nu} & -(R \sin \varphi - z_\ell) \end{vmatrix} = D_2 \quad (108)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2\dot{\lambda} & R \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t \\ \mu & 2\dot{\mu} & R \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t \\ \nu & 2\dot{\nu} & 0 \end{vmatrix} = D_3 \quad (109)$$

Then:

$$\varrho = \frac{D_1 + \frac{k_s^2}{r_s^3} D_2 + D_3}{D}. \quad (110)$$

Now we proceed as follows. We estimate for r_s a certain value. Then ϱ follows from (110) so that — when ϱ is found — x_s , y_s and z_s follow from (101), whereas $r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}$. If this value for r_s coincides with the estimated value of r_s , we have estimated r_s in the right way. Hence this procedure (estimating r_s) must be continued until accordance is obtained. Then further $\dot{\varrho}$ follows from (105). \dot{x}_s , \dot{y}_s and \dot{z}_s then follow from (101) in combination with (100), and \dot{x}_s , \dot{y}_s and \dot{z}_s follow from (104). The determination of the 6 elliptic orbit elements at time t from the corresponding quantities x_s , y_s , z_s , \dot{x}_s , \dot{y}_s , \dot{z}_s , can then further be attained by the method already described above.

13. Disturbing influence of the Sun on the orbital motion of the artificial satellite revolving around the Moon

Let us indicate the coordinates of the sun with respect to the geocentric system by x_\odot , y_\odot , z_\odot . Now the moon will be accelerated by the sun into the direction of the sun, so that with respect to the selenocentric system a homogeneous inertia field arises which has everywhere the strength of the specific solar attraction at the moon center and the opposite direction. Hence the disturbing solar force on the moon satellite is the geometric difference of the direct solar attraction on the moon satellite and the solar attraction by which the moon satellite would be acted upon if it were placed in the lunar center. Now the coordinates of the moon satellite with respect to the geocentric system are $x_\ell + x_s$, $y_\ell + y_s$, $z_\ell + z_s$, and the distance from the sun:

$$\sqrt{(x_\odot - x_\ell - x_s)^2 + (y_\odot - y_\ell - y_s)^2 + (z_\odot - z_\ell - z_s)^2}.$$

The components of the direct solar attraction per unit of mass on the moon satellite then become:

$$\frac{(x_\odot - x_\ell - x_s) f M_\odot}{[(x_\odot - x_\ell - x_s)^2 + (y_\odot - y_\ell - y_s)^2 + (z_\odot - z_\ell - z_s)^2]^{3/2}}$$

and similar the y and z component.

Hence the components of the solar disturbing force per unit of mass become:

$$F_{\odot x} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x_{\odot} - x_{\ell} - x_s)}{[(x_{\odot} - x_{\ell} - x_s)^2 + (y_{\odot} - y_{\ell} - y_s)^2 + (z_{\odot} - z_{\ell} - z_s)^2]^{3/2}} + \\ & + \frac{x_{\odot} - x_{\ell}}{[(x_{\odot} - x_{\ell})^2 + (y_{\odot} - y_{\ell})^2 + (z_{\odot} - z_{\ell})^2]^{3/2}} \Big] f M_{\odot} \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

and similar $F_{\odot y}$ and $F_{\odot z}$.

In the expressions for $F_{\odot x}$, $F_{\odot y}$ and $F_{\odot z}$, x_{\odot} , y_{\odot} , z_{\odot} , x_{ℓ} , y_{ℓ} and z_{ℓ} may be considered as given functions of time, whereas x_s , y_s and z_s are functions of the elliptic orbit elements and the time (being the instantaneous KEPLER motion). Indicating the elliptic orbit elements by $p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, t_0$ and introducing $\phi = \phi(p, \varepsilon, t_0, t)$ in complete analogy with the considerations above, we then obtain:

$$\left. \begin{aligned} F_{\odot x} &= F_{\odot x}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \\ F_{\odot y} &= F_{\odot y}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \\ F_{\odot z} &= F_{\odot z}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

14. Disturbing influence of the Earth on the orbital motion of the artificial satellite revolving around the Moon

The disturbing terrestrial force on the moon satellite is the geometric difference of the direct terrestrial attraction on the moon satellite and the terrestrial attraction by which the moon satellite would be acted upon if it were placed in the lunar center. Hence the components of this disturbing force per unit of mass become:

$$F_{\oplus x} = \left\{ \begin{aligned} & - \frac{(x_{\ell} + x_s)}{[(x_{\ell} + x_s)^2 + (y_{\ell} + y_s)^2 + (z_{\ell} + z_s)^2]^{3/2}} + \\ & + \frac{x_{\ell}}{[x_{\ell}^2 + y_{\ell}^2 + z_{\ell}^2]^{3/2}} \Big] f M \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

and similar $F_{\oplus y}$ and $F_{\oplus z}$.

Thus we find again ultimately:

$$\left. \begin{aligned} F_{\oplus x} &= F_{\oplus x}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \\ F_{\oplus y} &= F_{\oplus y}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \\ F_{\oplus z} &= F_{\oplus z}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

15. Disturbance due to the oblong shape of the Moon of the orbital motion of the artificial satellite revolving around the Moon

Let us consider the boundary surface of the moon as ellipsoid, represented by:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (115)$$

in which (115) refers to a system of coordinates $x'' y''' z'$, coinciding with the principal axes of the ellipsoid. This system $x'' y''' z'$, which is rigidly connected

with the moon ellipsoid, can be obtained from the selenocentric system $x y z$ by three consecutive rotations, according to the scheme:

$$\begin{array}{ccccc} x y z & \xrightarrow{\quad} & x' y' z & \xrightarrow{\quad} & x'' y'' z' & \xrightarrow{\quad} & x''' y''' z' \\ \text{about } z & & \text{about } x' & & \text{about } z' & & \\ \text{at angle } \alpha & & \text{at angle } \beta & & \text{at angle } \gamma & & \end{array}$$

(Hence the position of the moon ellipsoid as to the selenocentric system $x y z$ is defined by the 3 EULER angles α , β and γ .)

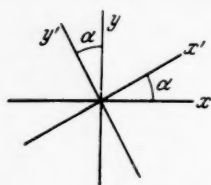


Fig. 9. About z
(z directed to observer)

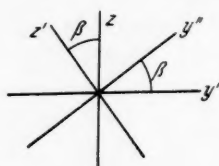


Fig. 10. About x'
(x' directed to observer)

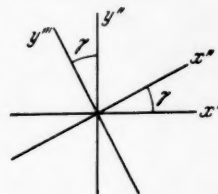


Fig. 11. About z'
(z' directed to observer)

Now we have to take into account the rotation of the moon ellipsoid, turning once throughout one revolution around the earth. Let the z' axis be the axis of rotation and ω be the angular speed of rotation. Then we may write $\gamma = \omega t + A$, in which A is an angle of phase. The angles α and β may be considered as constants. (α is the angle included by the line of intersection of the equator plane of the moon ellipsoid with the $x y$ plane, and β the angle included by the rotation axis of the moon ellipsoid with the z axis of the selenocentric system.)

Now by the transference from system $x y z$ to system $x'' y'' z'$ we obtain by the three consecutive rotations (see Figs. 9, 10, 11):

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} y' = y'' \cos \beta - z' \sin \beta \\ z = y'' \sin \beta + z' \cos \beta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x'' \cos \gamma - y''' \sin \gamma \\ y'' = x'' \sin \gamma + y''' \cos \gamma \end{cases}$$

Hence:

$$\begin{aligned} x &= (x'' \cos \gamma - y''' \sin \gamma) \cos \alpha - [(x'' \sin \gamma + y''' \cos \gamma) \cos \beta - z' \sin \beta] \sin \alpha \\ y &= (x'' \cos \gamma - y''' \sin \gamma) \sin \alpha + [(x'' \sin \gamma + y''' \cos \gamma) \cos \beta - z' \sin \beta] \cos \alpha \\ z &= (x'' \sin \gamma + y''' \cos \gamma) \sin \beta + z' \cos \beta. \end{aligned}$$

Or:

$$\left. \begin{aligned} x &= x'' [\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha] + \\ &\quad + y''' [-\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha] + z' [\sin \beta \sin \alpha] \\ y &= x'' [\cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha] + \\ &\quad + y''' [-\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha] + z' [-\sin \beta \cos \alpha] \\ z &= x'' \sin \gamma \sin \beta + y''' \cos \gamma \sin \beta + z' \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Hence, if \bar{F}_ζ denotes the specific gravitational attraction of the moon ellipsoid at some spatial point $x y z$ (referring to the selenocentric system), and $F_{x_\zeta}, F_{y_\zeta}, F_{z_\zeta}$ respectively $F_{x'_\zeta}, F_{y'_\zeta}$ and $F_{z'_\zeta}$ be the components as to the selenocentric

system $x y z$ and the system $x'' y''' z'$ rigidly connected with the lunar ellipsoid, we obtain by (116):

$$\left. \begin{aligned} F_{x_{\zeta}} &= F_{x_{\zeta}''} [\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha] + \\ &\quad + F_{y_{\zeta}'''} [-\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha] + F_{z_{\zeta}'} [\sin \beta \sin \alpha] \\ F_{y_{\zeta}} &= F_{x_{\zeta}''} [\cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha] + \\ &\quad + F_{y_{\zeta}'''} [-\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha] + F_{z_{\zeta}'} [-\sin \beta \cos \alpha] \\ F_{z_{\zeta}} &= F_{x_{\zeta}''} \sin \gamma \sin \beta + F_{y_{\zeta}'''} \cos \gamma \sin \beta + F_{z_{\zeta}'} \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

If we now like to determine the force components $F_{x_{\zeta}}$, $F_{y_{\zeta}}$, $F_{z_{\zeta}}$ at some point $x y z$ (referring to the selenocentric system), we find the corresponding values $x'' y''' z'$ from the linear eqs. (116).

Then further we obtain:

$$F_{x_{\zeta}''} = \iiint \frac{\rho(x y z) (x - x'') dx dy dz}{[(x - x'')^2 + (y - y''')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (118)$$

and similar expressions for $F_{y_{\zeta}'''}$ and $F_{z_{\zeta}'}$

in which $\rho(x y z)$ denotes the mass density distribution at any point within the moon ellipsoid. In (118), we have to extend the space integral throughout the volume of the moon ellipsoid, in which the variables $x y z$ now refer to the system $x'' y''' z'$, with (115) as boundary surface. The lunar internal mass distribution is unknown and must be estimated; the assumed distribution can be tested by comparing the computed and the observed motion.

Let us integrate (118) in the sequence $x \rightarrow y \rightarrow z$. The integration limits of x correspond to any values of y and z . Hence:

$$x_{1,2} = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

The integration limits of y are the extreme values of y belonging to any value of z . We now obtain by (115):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{or} \quad \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1.$$

We have now to take the extreme values of y on this ellipse. Hence we obtain as integration limits with respect to y :

$$y_{1,2} = \pm b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

For the rest, the integration limits of z become $z_{1,2} = \pm c$.

Hence (118) becomes:

$$F_{x_{\zeta}''} = \int_{z=-c}^{z=+c} dz \int_{y=-b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}}^{y=+b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}} dy \int_{x=-a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}}^{x=+a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}} \frac{\rho(x y z) (x - x'') dx}{[(x - x'')^2 + (y - y''')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (119)$$

and similar expressions for $F_{y_{\zeta}'''}$ and $F_{z_{\zeta}'}$.

Now let us write:

$$\frac{\rho(x y z) (x - x'')}{[(x - x'')^2 + (y - y''')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = F(x, y, z).$$

As to the integration with respect to x , we take n collocation points x_k , scattered throughout the interval:

$$x = -a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \rightarrow x = +a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Then replace for a definite value set y, z , $F(x, y, z)$ by

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{n \neq k} (x - x_n)}{\prod_{n \neq k} (x_k - x_n)} F(x_k, y, z),$$

in which:

$$\prod_{n \neq k} (x - x_n) = (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

and

$$\prod_{n \neq k} (x_k - x_n) = (x_k - x_1) (x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n).$$

Then the integration with respect to x with $\varphi(x)$ as replacement function can be carried out, providing:

$$\int_{x=-a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}}^{x=+a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}} \varphi(x) dx = \psi(y, z).$$

The procedure must be carried out for many sets of values y, z , so that the surface $\psi = \psi(y, z)$ in ψ, y, z space becomes known. Subsequently we obtain as integration with respect to y :

$$\int_{y=-b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}}^{y=+b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}} \psi(y, z) dy \quad (120)$$

which must be carried out for different values of z . Therefore we replace $\psi(y, z)$ by the integrable function:

$$\chi(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{n \neq k} (y - y_n)}{\prod_{n \neq k} (y_k - y_n)} \psi(y_k, z)$$

in which again n collocation points are chosen throughout the integration interval:

$$y = -b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \rightarrow y = +b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

We then obtain for (120):

$$\int_{y=-b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}}^{y=+b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}} \chi(y) dy = \eta(z).$$

This procedure must then be carried out for different values of z , corresponding with different intersection curves in ψ, y, z space of the surface $\psi = \psi(y, z)$ with a plane parallel to the ψ, y plane, at distance z from ψ, y .

Then further we obtain:

$$F_{x_{\zeta}}'' = \int_{z=-c}^{z=+c} \eta(z) dz. \quad (121)$$

For carrying out the integration (121), we can replace $\eta(z)$ by the integrable function:

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{n \neq k} (z - z_n)}{\prod_{n \neq k} (z_k - z_n)} \eta(z_k) \quad (122)$$

in which again the collocation points are chosen throughout the interval

$$z = -c \rightarrow z = +c.$$

We then obtain for (121):

$$F_{x_{\zeta}}'' = \int_{z=-c}^{z=+c} \zeta(z) dz,$$

which can be integrated directly.

Now in connection with the eqs. (117) the force components $F_{x_{\zeta}}$, $F_{y_{\zeta}}$ and $F_{z_{\zeta}}$ are found as functions of x , y , z (now referring to the selenocentric system) whereas x , y and z , being the coordinates of the instantaneous KEPLER motion, are known (by the procedure already described in the foregoing) as functions of p , ε , θ_0 , i , ψ , ϕ , and t in which $\phi = \phi(p, \varepsilon, t_0, t)$. Hence we find ultimately:

$$\left. \begin{aligned} F_{x_{\zeta}} &= F_{x_{\zeta}}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \\ F_{y_{\zeta}} &= F_{y_{\zeta}}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \\ F_{z_{\zeta}} &= F_{z_{\zeta}}(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Then the *disturbing* force per unit of mass, due to the deviation of the lunar body from spherical symmetry becomes:

$$F_{1\zeta} = F_{x_{\zeta}} + \frac{x_s / M_{\zeta}}{[x_s^2 + y_s^2 + z_s^2]^{3/2}} \left\{ \begin{aligned} &\text{and similar } F_{2\zeta} \text{ and } F_{3\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Thus the force components of the resulting specific disturbing force in x , y and z direction become:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_{\odot x} + F_{\oplus x} + F_{1\zeta} \\ F_2 &= F_{\odot y} + F_{\oplus y} + F_{2\zeta} \\ F_3 &= F_{\odot z} + F_{\oplus z} + F_{3\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Hence in connection with (112), (114), (123), (124) and (125) we find:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_1(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \\ F_2 &= F_2(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \\ F_3 &= F_3(p, \varepsilon, \theta_0, i, \psi, \phi, t) \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Further, in complete analogy with the formula's derived above for the earth satellite, we now obtain for the moon satellite a system (43), (44) of 6 simultaneous differential equations of first order in p , ε , θ_0 , t_0 , i and ψ , in which (126) must be substituted as right members of (44). This system can again be integrated by the method of successive approximations.

For the rest, a lunar mass distribution in accordance with the satellite motion can be found again in first approximation as follows. Denoting the coordinates of the moon satellite with respect to the selenocentric system by x , y and z , we can find x'' , y''' and z' from (116). Dividing the lunar volume in $3n$ parts with masses m_1, m_2, \dots, m_{3n} , we obtain in similar way as above (point 10):

$$F_{x_{\zeta}}'' = \sum_{i=1}^{3n} \frac{f m_i (x_i - x'')}{[(x_i - x'')^2 + (y_i - y''')^2 + (z_i - z')^2]^{3/2}} \left\{ \begin{array}{l} \text{and similar } F_{y_{\zeta}}''' \text{ and } F_{z_{\zeta}}'. \end{array} \right.$$

Consequently, $F_{x_{\zeta}}$, $F_{y_{\zeta}}$ and $F_{z_{\zeta}}$ follow from (117), in which for t the value must be substituted corresponding with x , y , z . Then:

$$\ddot{x} = F_{x_{\zeta}} + F_{\odot x} + F_{\oplus x} \left\{ \begin{array}{l} \text{and similar } \ddot{y} \text{ and } \ddot{z} \end{array} \right. \quad (127)$$

Measuring \ddot{x} , \ddot{y} and \ddot{z} for n times t_1, t_2, \dots, t_n (for which also the coordinates x , y and z , appearing in (127), must be determined by observation), we obtain by (127) $3n$ equations which are linear in the $3n$ quantities m_i , so that these can be solved.

Concluding it must be emphasized that never a *unique* solution of the internal mass distribution of the earth or of the moon can be obtained by *only* studying (by means of the satellite) the external gravitational field.

For consider in the mass ellipsoid a spherical region, concentric as to the center of the ellipsoid, and assume in this region a partial radial symmetric mass distribution $\rho_1(r)$ in such a way, that the density at any point may be represented by $\rho = \rho_1(r) + \rho_2(xyz)$. Then any variation of $\rho_1(r)$ (maintaining the radial symmetry and total mass due to ρ_1) will give the same external gravitational field. Hence in order to obtain a *unique* solution, always additional considerations of internal mass equilibrium will be required.

The Effect of the Earth's Magnetic Field on the Spin of the Satellite

By

Herbert B. Rosenstock¹, APS

(Received November 6, 1956)

Abstract. The angular velocity ω as a function of time t of a sphere or spherical shell rotating about an axis perpendicular to a uniform magnetic field B is given by $\omega(t) = \omega(0) \exp(-t/\tau)$, where the time constant τ , besides depending on the nature of the material, is inversely proportional to B^2 . The purpose of the present paper is to apply these results to the proposed satellite moving in the geomagnetic field. τ is found to be of the order of ten days.

Zusammenfassung. Die als Funktion der Zeit t betrachtete Winkelgeschwindigkeit ω einer Kugel oder sphärischen Hülle, die um eine zu einem einheitlichen magnetischen Feld B senkrechte Achse rotiert, ist gegeben durch $\omega(t) = \omega(0) \exp(-t/\tau)$. Dabei hängt die Zeitkonstante τ von der Natur des Materials ab und ist umgekehrt proportional zu B^2 . Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, diese Ergebnisse auf die Bewegung des projektierten Satelliten im geomagnetischen Feld anzuwenden. Es ergibt sich, daß die Größenordnung von τ 10 Tage ist.

Résumé. La vitesse angulaire d'une sphère ou d'une coque sphérique tournant autour d'un axe perpendiculaire à un champ magnétique uniforme B est une fonction du temps $\omega(t) = \omega(0) \exp(-t/\tau)$. La constante de temps τ , outre sa dépendance de la nature du matériau, est inversement proportionnelle à B^2 . L'objet de l'article est d'appliquer ce résultat au satellite en mouvement dans le champ géomagnétique. La constante de temps trouvée est de l'ordre de dix jours.

I. Introduction

It is expected that the earth's satellite to be launched in the future will spin about its axis several times per second at launching time. This is desired to make certain experiments feasible, as well as for aerodynamic stability. It has long been known that conductors rotating in a magnetic field will slow down [1]; the purpose of this report is to review the results existing on this subject and to apply them to the case of the satellite moving in the geomagnetic field.

II. The Torque and the Time Constant

SMYTHE [2] gives the following formula for the torque on a thin spherical shell rotating about an axis perpendicular to a uniform magnetic field:

$$T = -p\omega/(1 + q^2\omega^2) \quad (1)$$

where

$$p = 2\pi B_{\perp}^2 a^4 \sigma d/3$$
$$q = \mu a \sigma d/3.$$

¹ U.S. Naval Research Laboratory, Washington, D.C., USA.

Here a is the radius of the shell, d its thickness, σ is conductivity, μ the magnetic permeability, ω the angular velocity of rotation and B_{\perp} the magnetic field perpendicular to the axis of rotation. MKS units are used. The derivation of this formula is discussed in Appendix I.

When the initial angular velocity is small compared to q^{-1} (i.e. $q^2 \omega_0^2 \ll 1$), (1) may be written simply

$$T = -p\omega. \quad (2)$$

Using approximately realistic values for μ , a , σ and d , viz. $\mu = 1.25 \times 10^{-6}$ henrys/m., $a = .5$ m., $\sigma = 2 \times 10^7$ mho/m., $d = 7.8 \times 10^{-4}$ m. we find $q^{-1} \approx 300$ per second. It is not expected that the shell will be made to spin that fast, and the approximation (2) will therefore be satisfactory.

With the torque given by (2), NEWTONS equation of motion

$$T = I_0 \dot{\omega} \quad (3)$$

where I_0 is the moment of inertia of the shell, is readily integrated: we find

$$\omega = \omega_0 \exp(-t/\tau) \quad (4)$$

where

$$\tau = I_0/p.$$

The moment of inertia of a spherical shell is $I_0 = 8\pi \rho a^4 d/3$ where ρ is the density; with this and (1) the time constant becomes simply

$$\tau = 4\rho/B_{\perp}^2 \sigma. \quad (5)$$

It is worth noting that the time constant τ is independent both of the radius and the thickness of the shell, a fact that suggests that the result (4) and (5) will also hold for shells of arbitrary thickness and radius, including homogeneous spheres of any size. This is in fact correct (see Appendix I).

III. Application

The preceding section contains several stated and implicit simplifications and approximations which merit some discussion.

A. We have neglected the second term in the denominator of eq. (1), having justified this for the physical situation we envisage. There was however, no mathematical necessity for doing this, for (3) can be integrated in closed form also when this approximation is not made. The details of this, being of no direct interest in the present case, are relegated to Appendix II. Here we only note that refusal to make this approximation will decrease the absolute value of the torque, and that our result (4), however accurate or inaccurate, is certainly not smaller than the exact result.

B. The calculation applies to a homogeneous conducting shell. In practice, the satellite will be loaded down with experimental equipment and engineering structures. To a first approximation, this additional mass may be considered nonconducting. Inspection of the derivation of eq. (4) shows that in that case the time constant could be multiplied by

$$f(I) = I/I_0 = 1 + I'/I_0 \quad (6)$$

where I' is the moment of inertia of the nonconducting load and I the total moment of inertia of shell and load. Taking this effect into account will therefore increase the time constant τ , and the conclusion we reached in Section III A, that the effects described by eqs. (4), (5) are certainly not smaller than the true result, will still hold. Appendix III gives a semiquantitative estimate of the effect and shows that $f(I)$ is roughly $7/4$ in the case under consideration.

C. The quantity B_{\perp} in Section II was defined as the magnetic field perpendicular to the axis of rotation. It can be shown (Appendix I) that a magnetic field whose direction is parallel to that of the axis of rotation has no retarding effect. We must therefore put into eq. (5) the square of the component of magnetic field that is perpendicular to the instantaneous spin axis, not the square of the total field. Since the magnitude as well as the direction of the magnetic field changes as the satellite moves in its orbit, τ will vary as well. Fortunately, Section IV shows that τ is much larger than one period of revolution (about 90 minutes), and we may therefore average B_{\perp} (and τ) over one orbit. This is a geometrical problem simple in principle but somewhat involved computationally. It has been solved for circular orbits, as is outlined in Appendix IV. The result is

$$(B_{\perp}^2)_{\text{effective}} = B_1^2 \left[1 + \frac{3}{8} \sin^2 \alpha (1 + 2 \sin^2 \beta) \right] \quad (7)$$

$$= B_1^2 g(\alpha, \beta)$$

where α is the inclination of the orbit with respect to the magnetic equator and βR is the distance from the magnetically southernmost point on the orbit to the launching point, B_1 is the magnetic field at the magnetic equator, and R the radius of the orbit.

On account of the rotation of the dipole itself about the rotational axis of the earth, this average value will be somewhat different for each successive rotation of the satellite about the earth. Nonetheless (7) will give us a good idea of what the average effective field will be.

We notice that the total effect of this "orbit" correction is not large; the lowest and highest possible values of $(B_{\perp}^2)_{\text{eff}}$ are seen to be, respectively, B_1^2 and $17/8 B_1^2$; they apply, respectively, to orbits around the equator, and to orbits that start at the equator and pass over the poles.

D. The magnetic field depends on the distance of the orbit (which we have assumed circular) from the center of the earth. This correction is included in the derivation of Appendix IV. For orbits only a few hundred kilometers above sea level, the following correction formula will be satisfactory:

$$B_1^{-2} = B_0^{-2} [1 + 6x + 15x^2 + \dots] \quad (8)$$

$$= B_0^{-2} h(x)$$

where $x = 5\pi A \times 10^{-5}$ with A the orbit's altitude above sea level, in kilometers, and B_0 the sea level value of the earth's magnetic field at the magnetic equator.

IV. Numerical Results

If we include all the corrections of Sections II B, C, and D in eq. (5), we get

$$\tau_{\text{eff}} = \tau(B_0) f(I) h(x) / g(\alpha, \beta). \quad (9)$$

We use [3] $B_0 = 3.1 \times 10^{-5}$ webers/m², $\rho = 2.3 \times 10^3$ kg/m³, $\sigma = 2 \times 10^7$ mho/m and get

$$\tau(B_0) = 4.7 \times 10^5 \text{ sec.}$$

For $f(I)$ we use (see Appendix II) $7/4$. For an altitude of 400 km, x becomes .063 and $h(x) = 1.44$. To get a suitable value for $g(\alpha, \beta)$ we must remember that α and β themselves undergo small changes on account of the rotation of the earth. α will not exceed the sum of the inclination of the magnetic with

rotation axis of the earth (29°) and the inclination of the satellite's orbit with respect to the rotational equator (contemplated to be 40° , or 69° ; hence we use

$$\frac{1}{2.4} \int_{-1.2}^{1.2} \sin^2 \alpha \, d\alpha = .35$$

as an average value of $\sin^2 \alpha$, and $1/2$ for the average value of $\sin^2 \beta$. This gives $g(\alpha, \beta) = 1.26$. (9) becomes therefore

$$\tau_{\text{eff}} = 9.4 \times 10^5 \text{ seconds} \quad (10)$$

or

$$\tau_{\text{eff}} = 11 \text{ days.}$$

Many factors involved in the design of the first satellite are so unsettled at the time of this writing that our numerical results (10) can be an estimate at best. Note, however, that all data and correction factors have been chosen so as to give a value of τ which will be too small rather than too large; (10) should therefore be a lower limit for the effective time constant.

It will be noticed also that the instantaneous effect of the geomagnetic field is likely to decrease greatly in the future when satellites with presumably greater payloads and higher orbits will be designed. On the other hand, the expected longer lifetime of such vehicles may make this effect of greater importance in the long run.

V. Summary

The angular velocity ω of a sphere or spherical shell rotating about an axis perpendicular to a uniform magnetic field B is given by $\omega = \omega(0) \exp(-t/\tau)$, where the time constant τ , besides depending on the nature of the material, is inversely proportional to B^2 . To calculate the effect of the earth's magnetic field on the proposed satellite, appropriate corrections for load and changing magnitude and direction of the field must be made. τ is found to be of the order of 10 days.

I should like to thank Dr. J. E. KUPPERIAN, JR. for much discussion. MR. M. SCHACH, who has performed similar calculations independently, has kindly called my attention to Ref. [2]. The data needed for Sec. IV and Appendix III were provided by various workers at this laboratory.

Appendix I

It is well known that an electrical generator whose terminals are connected to a resistive load will stop moving unless mechanical power is supplied to it. The same will happen if the terminals are shorted, since the generator has an internal resistance as well. A conducting sphere rotating with angular velocity ω_y about the y axis in a uniform magnetic field B_z in the z direction may be considered to be a shorted generator and will slow down in the same fashion. The order of the magnitude of the torque can be estimated as follows: the induced electric field is $E_y = v_x B_z \cong \omega r B$, the current density $J_y = \sigma E \cong \sigma \omega r B$, the force exerted on a current element by the magnetic field $F_x = J_y B_z \cong \sigma \omega r B^2$, the torque about the y axis $F_x z \cong \cong F_x r \cong \sigma \omega r^2 B^2$; when integrated over the sphere this will give $\sim \sigma B^2 v a^2 \omega$, v being the volume of the sphere; and this is essentially eq. (1), except for numerical constants and for the denominator. The denominator arises from the fact that for large ω the secondary magnetic field which is induced by a current is not negligible compared to the primary one (a fact which we have tacitly assumed in the above order-of-magnitude calculation).

Exact derivations of eqs. (1) and (4) may be found in the literature [1, 4, 5] and are outlined in textbooks and will not be given here. It has been shown [4] that the lines of current flow are circles in the yz plane whenever the denominator of (1) can be neglected, so that the results (9) hold for solid homogeneous spheres as well as arbitrarily thick spherical shells.

The fact that a magnetic field B_y parallel to the axis of rotation has no effect, except a negligible transient one, on the rotational motion is also easily shown: the induced electric field which is perpendicular to both B and v , will always and everywhere be directed outward towards the surface; as a result the surface of the sphere will charge up and the field produced by these charges will eventually (i.e. in a small fraction of a second) cancel the electric field induced by the magnetic field. As a result no currents will flow except for an instant, and in the steady state there will be no retarding torque. A very similar argument shows that there will be no force, except a negligible transient one, retarding the translational motion of a conductor in a magnetic field [6].

Appendix II

Eq. (3) with T given by (1) without any approximation reads

$$I_0 \omega = -p \omega / (1 + q^2 \omega^2);$$

this is readily integrated to give

$$\frac{\omega}{\omega_0} \exp \left[-\frac{1}{2} q^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right] = \exp (-t/\tau),$$

an expression valid for all ω . When ω_0 is large ($q^2 \omega_0^2 \gg 1$), (1) simplifies to $T = -p/q^2 \omega$ and integration of (3) leads to the particularly simple solution

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2t/\tau q^2.$$

Appendix III

To compute the moment of inertia I_0 of the shell and the moment of inertia I' of the other objects in the satellite, the detailed structure of it must be known. We use the best design data available at this time. The results are estimates only, but it will be noted from the following table that only the antennas have a moment of inertia comparable to the shell. The uncertainty in our data is therefore not likely to have gross consequences.

The moments of inertia of the various items are estimated in the following table:

Structure	Formula for Moment of Inertia	M (lbs.)	R (Inches)	Volume of Moment of Inertia (lbs.in ²)
Shell	$(2/3) M R^2$	< 6	10	$I_0 < 400$
Antennae	$(1/3) M (R_1^3 - R_2^3)/(R_1 - R_2)$.38	40, 10	266
Lya experiment	Approximated by $(1/2) M R^2$.25	10	13
Equipment at center		10	1.5	11
Plate at top		.5	3	2
Braces		.4	7	10
				$I' = 302$

We conclude that $I'/I_0 \geq 3/4$.

Appendix IV

Define a righthanded coordinate system $S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; a coordinate system S' obtained by rotating z into x about y by an angle α ; and a coordinate system S'' obtained by rotating x' into y' about z' by an angle β . We have

$$S' = TS \quad (\text{A } 1)$$

$$S'' = US' \quad (\text{A } 2)$$

$$S'' = UTS \quad (\text{A } 3)$$

where

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also define

$$r'^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos \theta' = z'/r', \quad \tan \varphi' = y'/x'. \quad (\text{A } 4)$$

Let the z axis coincide with the earth's magnetic axis, and let α be the inclination of the plane of the orbit with respect to the (magnetic) equator; then the satellite will proceed along the φ' direction; and if $R\beta$ is the distance along φ' from the magnetically southernmost point on the orbit, then the satellite direction of motion at the instant of launching will be y'' , and since the direction of the spin axis will coincide with the direction of motion at the instant of launching, the direction of the spin will always be y'' .

In the orbit, $z' = 0$, $\theta = \pi/2$, $\sin \theta' = 1$, $\cos \theta' = 0$ and the inverse of (1) simplifies to

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha \\ y &= y' \\ z &= x' \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{A } 5)$$

and the inverse of (4), which usually is

$$\begin{aligned} x' &= r \sin \theta' \cos \phi' \\ y' &= r \sin \theta' \sin \phi' \\ z &= r \cos \theta' \end{aligned} \quad (\text{A } 6)$$

simplifies to

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \phi' \\ y' &= r \sin \phi' \\ z' &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A } 7)$$

The magnetic field B is (very nearly) a dipole field, i.e. it can be obtained by taking the negative gradient of the potential

$$V = -V_0 \cos \theta / r^2 = -V_0 z / r^3.$$

Its polar components are therefore

$$\begin{aligned} B_r &= (V_0/r^3) 2 \cos \theta \\ B_\theta &= (V_0/r^3) \sin \theta \end{aligned}$$

and its cartesian components are

$$\begin{aligned} B_x &= (V_0/r^3) 3 xz \\ B_y &= (V_0/r^3) 3 yz \\ B_z &= (V_0/r^3) (2z^2 - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (\text{A } 8)$$

where

$$V_0/R_e^2 = .31 \text{ gauss} = 3.1 \times 10^{-8} \text{ webers/m}^2. \quad (\text{A } 9)$$

The quantity we wish to calculate is the average value (over one circular orbit of radius R centered about the origin of the dipole) of the square of the component of magnetic field that is perpendicular to the spin of the satellite,

$$(B^2)_{\text{eff}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' (\mathbf{S} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A } 10)$$

where \mathbf{S} is a unit vector in the direction of the spin. Using the identity [7]

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

the integrand of (A 10) becomes $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{B})$.

Since \mathbf{S} is a unit vector, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = 1$; and since its direction is the y'' direction, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ is simply $B_{y''}$. (A 10) therefore is

$$(B^2)_{\text{eff}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - B_{y''}^2). \quad (\text{A } 11)$$

One must now express $B_{y''}$ in terms of the unprimed system by means of (A 3); then substitute (A 8) into the integrand of (A 11); express the unprimed variables in terms of primed cartesian ones by use of (A 5) and finally in terms of primed polar ones by use of (A 7). All this, as well as the subsequent integration, is elementary. We find

$$(B^2)_{\text{eff}} = \left(\frac{V_0}{R^3} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{8} \sin^2 \alpha (1 + 2 \sin^2 \beta) \right] \quad (\text{A } 12)$$

$$= B_1^2 g(\alpha, \beta)$$

where $B_1 = V_0/R^3$ is the value of the geomagnetic field at the magnetic equator a distance R from the origin. B_1^2 can be written

$$\begin{aligned} B_1^2 &= (V_0/R_e^3)^2 (R_e/R)^6 \\ \text{or } B_1^2 &= B^2/(1+x)^6 \\ &= B^2/h(x) \end{aligned} \quad (\text{A } 13)$$

where $R_e = 40000/2\pi$ km is the radius of the earth, $A \equiv R - R_e$ is the height of the orbit above sea level, $x \equiv A/R_e$ and B_0 , the magnitude of the geomagnetic field at sea level at the magnetic equator, is 3.1×10^{-5} webers/m². (A 13) is useful when x is small; in that case we may use the binomial expansion,

$$h(x) = 1 + 6x + 15x^2 \dots$$

with $x = 5\pi \times 10^{-5}$ A (A in Km).

References

1. HEINRICH HERTZ, Dissertation, 1880; reprinted in Misc. Papers, p. 121, London: MacMillan, 1896. This fundamental paper contains most of the theory needed in Section II of this report, including particularly eq. (4).
2. W. R. SMYTHE, Static and Dynamic Electricity, 2nd ed., p. 417. London: McGraw-Hill, 1950.
3. E. BULLARD in: The Earth as a Planet (G. P. KUIPER, ed.), p. 123. Chicago: University of Chicago Press, 1954.
4. R. GANS, Z. Math. Physik 48, 1 (1903), contains, we believe, the most complete available treatment of the case of small angular velocities ($p^2 \omega^2 \ll 1$).
5. R. GANS, Arch. Elektrotechn. 9, 413 (1921), extends the treatment to large angular velocities.
6. H. B. ROSENSTOCK and T. A. CHUBB, Amer. J. Physics 24, 413 (1956).
7. J. A. STRATTON, Electromagnetic Theory, p. 604. London: McGraw-Hill, 1941.

Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus

Zur Mechanik der Photonenstrahlantriebe. Von E. SÄNGER. (Mitteilungen aus dem Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe e.V.: Heft 5.) Mit 17 Abb. und 8 Tab., 92 S. München: R. Oldenbourg. 1956. DM 36.—.

Der vorliegende Beitrag zur Mechanik der Photonenstrahlantriebe stellt den ersten Teil eines umfassenden Forschungsprogrammes auf dem Gebiet der Photonenstrahlantriebe dar, dem entsprechende weitere Abhandlungen über die Verbrennungsphysik, die Strahlungsphysik, die Strahlungsreflexion und Strahlungsabsorption in Photonenstrahltriebwerken folgen sollen. Der Verfasser gibt zunächst die Grundlage einer möglichst allgemeinen, relativistischen Strahlantriebsmechanik, in der die Mechanik der Photonenstrahlantriebe nur als der hier wichtigste Sonderfall erscheint, während alle anderen Antriebsfälle von Fahrzeugen, wie chemische und kernchemische Raketen, Staustrahlen, Turbinenstrahlen, Propellerstrahlen bis zu den Antrieben von Wasser- und Landfahrzeugen, Radantrieben und biologischen „Gehantrieben“ als weitere Sonderfälle darin enthalten sind.

Der Verfasser hat die Ergebnisse seiner Berechnungen zum ersten Mal auf der ersten internationalen Tagung des Forschungsinstituts für Physik der Strahlantriebe (Februar 1956 in Freudenstadt, Schwarzwald) veröffentlicht und damit eine weltweite Diskussion entfesselt, die zur Zeit noch anhält.

Für interstellare und interplanetare Raumfahrt, aber auch für die atmosphärische Luftfahrt scheinen die Photonenstrahlantriebe jedoch tatsächlich eine Endlösung des Antriebsproblems zu versprechen.

Der Gesamtinhalt des umfangreichen Berichts (den der Rezensent schon jetzt, relativ kurze Zeit nach seinem Erscheinen, als historisches Dokument von fundamentaler Bedeutung bezeichnen möchte) läßt sich natürlich hier nicht wiedergeben.

Die Ergebnisse [vgl. E. SÄNGER, *Astronaut. Acta* **3**, 89 (1957)] folgen aus der speziellen Relativitätstheorie, welche besagt, daß Masse, Zeit und Länge keine absoluten Größen sind, sondern vom Bezugssystem abhängen, daß also zum Beispiel die Zeitmessung in einer schnell fliegenden Rakete andere Werte ergibt als die von der Erde aus vorgenommene Zeitmessung. Diese Relativität von Länge und Zeit ist dem Physiker der Gegenwart verständlich; andererseits beruhen zahlreiche Mißverständnisse bei der Betrachtung und Erörterung der vorliegenden Flugmechanik nur darauf, daß diese Relativität von Länge und Zeit auch heute durchaus noch nicht zum allgemeinen Bildungsgut gehört (von grundsätzlichen Erwägungen über die Gültigkeit der Theorie abgesehen), obwohl sie bei Messungen an Mesonen der kosmischen Strahlung in Erscheinung tritt.

Betrachten wir ein in etwa 30.000 m Höhe entstandenes Meson, dessen experimentell bestimmte Lebensdauer rund $2,2 \cdot 10^{-6}$ sec beträgt. Seine Geschwindigkeit ist nur wenig kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Demnach dürfte es einen Weg von höchstens 600 m zurücklegen, ehe es zerfällt. Trotzdem erreicht es die Erdoberfläche, kommt also 50mal so weit, wie ihm eigentlich zusteht. Könnte sich ein Beobachter im Augenblick der Entstehung eines Mesons auf diesem niederlassen und sein Schicksal mit einer äußerst genauen Uhr verfolgen, würde er zu dem Ergebnis kommen, daß das Meson tatsächlich nur rund 2 milliontel Sekunden existiert und in dieser Zeitspanne die 30.000 m lange Strecke vom Ort seiner Entstehung bis zur Erdoberfläche zurücklegt. Dividiert er diesen ihm bekannten Weg durch die gemessene Zeit, erhält er als Geschwindigkeit $15 \cdot 10^{11}$ cm/sec, also „50fache Lichtgeschwindigkeit“. Mißt er allerdings vom Meson aus auch noch den zurückgelegten

Vol.
3
1957

Weg, würde er nur 600 m registrieren, das heißt die Strecke von 30.000 m wäre auf 600 m zusammengeschrumpft (Längenkontraktion) und die Lichtgeschwindigkeit, vom Meson aus betrachtet, nicht überschritten.

Die von SÄNGER benutzte, die Relativgeschwindigkeit des Lichts überschreitende fiktive Eigengeschwindigkeit der Photonenrakete ergibt sich, weil aus praktischen Gründen Zeit und Weg in zwei verschiedenen Bezugssystemen gemessen werden. Die Zeit wird an Bord der Rakete gemessen, denn diese Eigenzeit ist natürlich für die Lebensspanne der Besatzung und den Treibstoffverbrauch des Antriebs allein maßgeblich. Der Weg dagegen wird von der Erde aus gemessen, denn die uns bekannten astronomischen Distanzen sind allein für den Erfolg der Reise maßgeblich. Physikalisch ergibt diese Verknüpfung von Messungen in zwei verschiedenen Bezugssystemen keinen sinnvollen Wert, praktisch ergibt sie den *einzigen* sinnvollen Wert. Wenn man aus praktischen Gründen in Zukunft von „Überlichtgeschwindigkeit“ spricht, muß man natürlich wissen, daß damit nicht gemeint ist: „schneller als Photonen“, sondern nur: „die fiktive Eigengeschwindigkeit — ein Rechenergebnis aus Messungen in zwei verschiedenen Bezugssystemen — wird größer als 300 000 km/sec“.

Da der vorliegende Bericht, wie eingangs erwähnt, nur den ersten Teil eines umfassenderen Forschungsprogrammes darstellt, gibt der Verfasser noch keine technischen Lösungen für den Photonenstrahlantrieb an. Die quantitative Auswertung des Photonenstrahlantriebs führt ihn jedoch zu dem Schluß: „Raumfahrten in solche Tiefen der Galaxis, daß sie mit endlicher Wahrscheinlichkeit zur Begegnung mit außerirdischen Intelligenzen führen, werden mit einer technologischen Kombination des Prinzips der Photonenraketen mit jenem der Photonenstaustrahlantriebe am ehesten ausführbar sein.“ An anderer Stelle des Vorworts zu vorliegendem Bericht spricht der Verfasser davon, „daß einmal Photonenraketen und Photonenstaustrahlen die äußersten Weiten des Kosmos durcheilen auf der Suche nach unseren Brüdern im Weltall“, so daß man vorliegende Arbeit in Abwandlung eines 1925 von WALTER HOHMANN verwendeten Titels („Über die Erreichbarkeit der Himmelskörper“) auch überschreiben könnte mit: „Über die Erreichbarkeit der Fixsterne“.

H. GARTMANN, Frankfurt a. M.

Raketentechnik und Raumfahrtforschung. Beiträge zur Technik der Strahl-Antriebe und -Flugkörper, zur Ballistik, Elektronik, Raumfahrtmedizin und Höhenforschung sowie zu deren naturwissenschaftlichen und technischen Grundlagen. Herausgegeben von der Deutschen Gesellschaft für Raketentechnik und Raumfahrt e.V., Stuttgart-Zuffenhausen. Hefte 1 und 2 (April und Juli 1957). Einzelpreis je Heft DM 4.—, § 1.—.

Die DGRR (vormals Gesellschaft für Weltraumforschung e.V.) gibt seit kurzem eine technisch-wissenschaftliche Berichtsreihe heraus, von der nun die beiden ersten Hefte vorliegen. Aus ihrem Inhalt geht hervor, daß diese Berichtsreihe, deren Einzelnummern in zwangloser Reihenfolge erscheinen sollen, wirklich das gesamte Gebiet der Raumfahrtforschung zu erfassen bestrebt ist.

Aus der Feder der aus dem In- und Ausland stammenden Verfasser H. v. ZBOROWSKI, E. BÜCHNER, C. R. HIMMLER, A. EHMERT, E. LOHRMANN, W. BERGER, J. W. WIGGINS, H. H. KOELLE, E. H. GRAUL sind Arbeiten enthalten über: zylindrische Raketenbrennkammern; thermodynamisches Verhalten und Leistungsdaten flüssiger Treibstoffe für Raketentriebwerke; Automation durch hydraulische und elektrohydraulische Steuerungen in Raketen; Strahlung und Ionosphäre; kosmische Strahlung; Photoelemente in künstlichen Erdsatelliten; technische Gase als Arbeitsmedien für Raketentriebwerke; Feststofftriebwerke für höchste Geschwindigkeiten; Symbole und Definitionen für die Berechnung von Stufenraketen; radiobiologische Probleme der Raumfahrt; ferner technische Berichte über ein- und zweistufige elektrohydraulische Servoventile (H. MARX), bzw. Steuerschema und Steuerorgane der A-4-Rakete (D. E. KÖLLE). Wie man sieht, fürwahr ein ausgezeichnete Querschnitt durch die Wissenschaft der Astronautik.

Die einzelnen Arbeiten, als deren Zweck angegeben wird, daß sie der einschlägigen deutschen Industrie und dem interessierten Personenkreis konkrete Unterlagen für

eine fachliche Unterrichtung bieten wollen, zeigen ein hohes Niveau. Eine den umfaßten Gebieten nach sehr breit angelegte Rubrik „Literaturhinweise“ zitiert in übersichtlicher Gliederung neuere Erscheinungen der Buch- und Zeitschriftenliteratur.

Die Berichtsreihe enthält nicht nur Übersichtsartikel, sondern auch Original-Forschungsarbeiten. Da die Astronautik zu den der Gegenwart arтеigenen, sich neu bildenden „synthetischen Wissenschaften“ zählt und *kein* „Astronaut“ Fachmann auf allen beteiligten Spezialgebieten sein *kann*, bieten die Hefte jedem etwas, oder besser gesagt, jedem vieles. Sie sind daher als eine sehr erfreuliche Leistung der DGRR zu werten, die sich mit dieser Neugründung ein großes Verdienst und sicherlich einen beständigen Platz in der astronautischen Literatur erworben hat.

F. HECHT, Wien

Rocket Propulsion Elements. An Introduction to the Engineering of Rockets. Von G. P. SUTTON. Zweite Auflage. Mit 130 Textabb., XIII, 483 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1956. Geb. \$ 10.25.

Der bekannte Spezialist der Rocketdyne, einer Division of North American Aviation, Inc., hat nach sieben Jahren dem inzwischen unbestritten eingeführten Werk eine zweite Auflage folgen lassen. Als Mann der Technik sowohl wie auch als Universitätslehrer (University of California) zeigt er den richtigen Blick für eine lehrbuchmäßige Darstellung der wissenschaftlichen und technischen Grundlagen des Raketenantriebes und der Ausführungsformen des Raketenmotors. Wenn der Autor darauf hinweist, daß die erste Auflage seines Werkes als Textbuch in vielen Kursen über Raketentechnik an Colleges, militärischen und industriellen Anstalten benützt worden ist, so darf der Rezensent in aller Bescheidenheit vielleicht erwähnen, daß auch ihm dieses Buch als eine der besten Grundlagen wertvollste Dienste für ein einschlägiges Referat in den Chemischen Instituten der Wiener Universität geleistet hat.

Die Vermehrung des Umfanges von 294 Seiten auf nunmehr 483 Seiten in so wenigen Jahren entspricht der gewaltigen Entwicklung der Wissenschaft und Technik des Raketenantriebes. Eine Bibliographie von 46 Seiten gibt dem Studierenden Gelegenheit, seine Kenntnisse aus der Originalliteratur zu vertiefen. Darüber hinaus sind den Einzelabschnitten weitere Literaturhinweise und Aufgabensammlungen angeschlossen.

Jedes Lehrbuch zeichnet sich durch die persönliche Auffassung des Verfassers und seine besondere Bewertung der einzelnen Stoffgebiete aus. Manche Rezensenten pflegen eine wesentliche Aufgabe darin zu erblicken, zu kritisieren, daß der Verfasser etwa den einen oder anderen Sektor „nicht vollständig genug“ behandelt habe, weil sie selbst vielleicht ein solches Buch anders geschrieben haben oder schreiben würden. Der unterzeichnete Rezensent ist der Meinung, daß bei einem so jungen Gebiet, wie es die *heutige* Raketentechnik darstellt, eine solche Beurteilung schlecht angebracht wäre und man dem Verfasser für seine große Mühe, dieses Werk aus der Fülle des Materials zu „komponieren“ und es auf dem laufenden Stand zu halten, dankbar sein muß. In diesem Sinn erlaubt er sich, nachdem er die erste Auflage studiert und die zweite durchgesehen hat, sein Urteil dahin zu äußern, daß das Buch von G. P. SUTTON seinen bleibenden Platz in der Lehrbuchliteratur der Raketentechnik bewahren wird, weil es ein *sehr wertvolles* Buch ist, das angehende junge Raketentechniker und Astronauten als Einführung mit sehr viel Nutzen studieren können und sollten.

F. HECHT, Wien

Meteors. Proceedings of a Symposium on Meteor Physics. Herausgegeben von T. R. KAISER. (Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics: Special Supplement, Band II.) Mit 74 Textabb., VII, 204 S. London & New York: Pergamon Press Ltd. 1955. 55 s.

Dieses Sammelwerk berichtet über Vorträge, die auf dem Symposium über Meteorphysik in Jodrell Bank Experimental Station, University of Manchester, im Juli 1954 gehalten wurden. Die bedeutendsten Fachleute aus allen Teilen der Erde bereicherten es durch 39 Vorträge, so daß es unmöglich ist, auf beschränktem Raum alle

Vol.
3
1957

behandelten Themen aufzuzählen. Sie beziehen sich u. a. auf durch Meteore und Meteoriten hervorgerufene Leuchterscheinungen; Struktur, Geschwindigkeiten und Bahnen dieser kosmischen Körper; ihren Einfluß auf die Ionosphäre; Radio- und Radarmessungen; Meteorströme; den berühmten Eisenmeteoritenregen von Sikhote-Aline, von dem seither vielen Museen in aller Welt Probestücke überlassen worden sind; die interplanetare Materie im Sonnensystem. Von den Autoren mögen hier — als pars pro toto — nur F. L. WHIPPLE, E. J. ÖPIK, T. R. KAISER, H. SIEDENTOPF, V. G. FESSENKO erwähnt werden, ohne daß damit im mindesten die Bedeutung der übrigen Autoren und ihrer Beiträge beeinträchtigt werden soll.

Die Astronautik bezeugt seit jeher für diese Himmelskörper auch aus praktischen Gründen eminentes Interesse und wird den aus ihrem Auftreten entspringenden Gefahren um so besser entgegentreten können, je mehr wir schon heute über Meteore und Meteoriten wissen. Dazu leistet das vorliegende Sammelwerk, das eine wahre Fundgrube für alle Interessierten darstellt, einen bedeutenden Beitrag.

F. HECHT, Wien

Einführung in die Atomphysik. Von W. FINKELNBURG. Vierte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 266 Textabb., XI, 545 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 45.—.

Schon nach drei Jahren erwies sich eine Neuauflage des vorliegenden Werkes als erforderlich, die jedoch gegenüber der dritten Auflage keine allzu großen Umarbeitungen erfuhr, so daß der Umfang im wesentlichen der gleiche blieb. Das Buch hat sich als ein von einem bewährten Fachmann geschriebener Studienbehelf längst durchgesetzt. Die Anwendung der Atomenergie in der Astronautik, die früher oder später ja folgerichtig kommen wird, ist auch für die Forscher und Ingenieure der Raumfahrt und Raketentechnik von unabdingbarer Bedeutung. Infolgedessen gehen Bücher wie das vorliegende auch die auf diesem Gebiet zusammenarbeitenden Fachleute verschiedenster Spezialrichtungen an. Für den nicht-deutschsprachigen Leser sei erwähnt, daß es sich um kein Werk der Praxis, sondern um ein solches handelt, das dem Benützer die Grundlagen der Atomphysik und der experimentellen Beobachtung verständlich macht.

Die einzelnen behandelten Abschnitte sind: Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne, Photonen; Atomsppektren und Atombau; quantenmechanische Atomtheorie; Physik der Atomkerne; Physik der Moleküle; Festkörper-Atomphysik. Vor allem die an erster, dritter und vierter Stelle genannten Kapitel sollten den astronautisch eingestellten Physiker und Ingenieur besonders interessieren. In dem Abschnitt über die „Physik der Atomkerne“ wird u. a. auf die thermischen Kernreaktionen bei Höchsttemperaturen (es sei darauf hingewiesen, daß die Physik bei hohen Temperaturen das Spezialgebiet des Verfassers ist) im Innern der Sterne und die Entstehung der Elemente, die Höhenstrahlung (cosmic rays), die Stoßprozesse energiereicher Elektronen und Photonen, Kaskadenschauer, die Rolle der Mesonen in der Höhenstrahl- und Kernphysik, die Kernkräfte und das Problem der universellen Naturkonstanten eingegangen, auf höchst aktuelle Probleme jenes Forschungsgebietes also, das vielleicht einmal zur Verwirklichung der Photonenantriebe führen wird.

Es ist überflüssig, dem seit 1948 stets auf der Höhe der Forschungsergebnisse gehaltenen Werk eine besondere Empfehlung mitzugeben.

F. HECHT, Wien

Erratum

CANNEY, H. E., JR., and F. I. ORDWAY, III.: The Uses of Artificial Satellite Vehicles. Part II. Astronaut. Acta 3, Fasc. 1, 1 (1957).

p. 11: In the last line it should read . . . and 1000 miles [86], some in the equatorial plane, to capitalize on tangential velocity.

Additional remark

KLEMPERER, W. B., and R. M. BAKER, JR.: Satellite Librations. *Astronaut. Acta* **3**, Fasc. 1, 16 (1957).

The derivation given in the article for the oscillation frequency of a dumbbell shaped satellite and for an oblong body of revolution on a circular orbit applies only to oscillations lying in the plane of the orbit. If such a body is in an attitude with its axis inclined out of the orbital plane, then a centrifugal moment will come into play. Its magnitude is exactly $1/3$ of the moment of the gravitational forces, both in the case of the dumbbell and of the ellipsoid. Hence the oscillation frequency, ω' , will here have a factor 2 instead of $\sqrt{3}$ and the formulas corresponding to equation (9), (20), or (20 a) will read $\omega' = 2 \Omega$, $2 \Omega \epsilon / \sqrt{2 - \epsilon^2}$, $\sqrt{2} \Omega \epsilon$ respectively, and for the Moon $T_b' = 20$ and $T_c' = 35$ lunar months.

In view of this, the last sentence of the penultimate paragraph on page 21 is incorrect and should be deleted. So should the words "however" and "quite" in the two subsequent sentences, to be consistent.

This situation was brought to our attention by Dr. R. E. ROBERSON of North American Aviation Company, Atomics Division, which is gratefully acknowledged.

At this occasion, a few small typographical errors which had occurred in the printed article may also be corrected:

On page 18 in equation (2) read... — T instead of T .

On page 19 in equation (3) read... mg instead of m .

On page 19 in equation (7) read... ϕ_0 instead of ϕ_2 .

On page 26 in equation (16) read... $b^4/4$ instead of $b^2/4$ and $4a^4$ instead of $4a^2$.

Vol.
3
1957

New Zealand Visual Observations of the Rocket Accompanying the Russian Artificial Satellite

By

R. A. Anderson¹ and C. S. L. Keay¹

(With 1 Figure)

(Received November 12, 1957)

Abstract. Tracks derived from New Zealand visual observations are presented and a comparison made between the observed regression of the nodes of the orbit and that expected by theory.

Zusammenfassung. Aus visuellen Beobachtungen von Neuseeland aus werden Bahnprojektionen angegeben und ein Vergleich der beobachteten mit der theoretisch erwarteten Regression der Knoten gezogen.

Résumé. Présentation de trajectoires déduites des observations visuelles faites en Nouvelle Zélande et comparaison entre la régression des noeuds observée et celle prévue par la théorie.

1. Introduction

During the week following the launching of the first Russian artificial satellite, New Zealand was one of the most favourably positioned countries for making visual observations, due to the fact that it was almost directly underneath the orbit during the hours of evening twilight, when the rocket and satellite were still illuminated by the Sun.

Within a few days of the launching, reports from throughout New Zealand indicated that a surprisingly bright object was plainly visible following the predicted path of the satellite. An announcement from Russia suggested that this was likely to be the third stage of the rocket which launched the satellite. This was verified by DOPPLER radio results which indicated that the satellite's times of approach differed slightly from those of the visible object, whereupon a Dominion-wide appeal was made for visual sightings from members of the public. As a result, adequate sightings were obtained to enable tracks to be plotted for the evening approaches occurring on October the 9th and 12th. Weather conditions severely limited the sightings on other days prior to the disappearance of the rocket from the evening sky. It is the purpose of this paper to present and discuss the data obtained.

2. Observational Data

The basis of the observations lay in obtaining accurate times of passage of the rocket through the constellations of Scorpio and Aquila, these being conveniently placed and prominent enough to enable the public to recognise them. However, various other methods were also used, e.g. theodolite bearings, photographs taken by ordinary cameras and visually observed positions relative

¹ Physics Department, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.

to constellations other than those suggested. The best reports were used to define the tracks shown on the accompanying chart, the remainder of the observations being used as checks only.

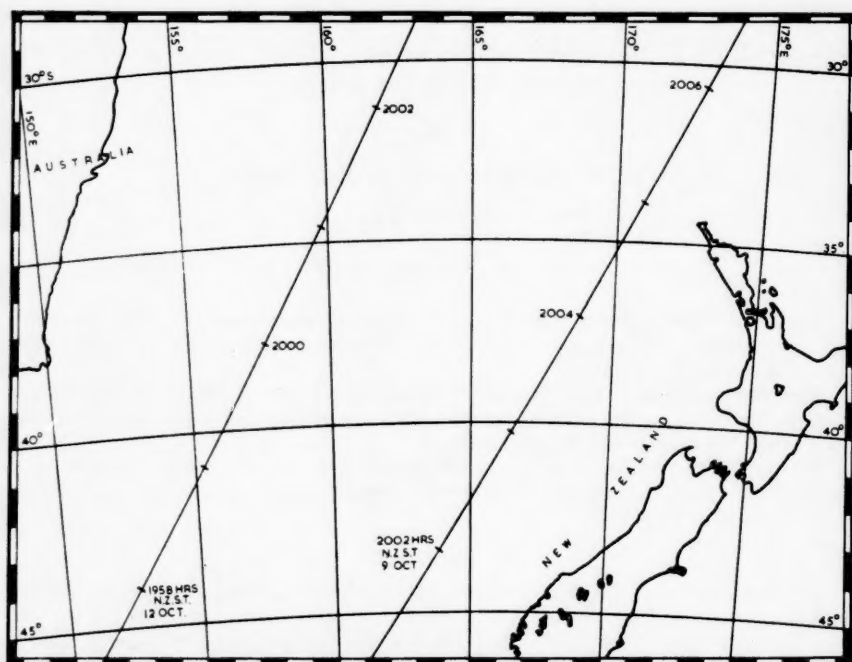


Fig. 1. Orbital tracks near New Zealand for the evenings of October 9th and 12th

Most of the observations were star checks which were used to derive local values for the azimuth and elevation at the time of observation. These azimuths and times were plotted on a chart and, with the aid of a template, the tracks could be drawn to fit them. The outline of the template represented the projection of the orbit on the rotating earth and was calculated assuming an orbital inclination of 65° and a period of 96 minutes, these being the only assumptions necessary. The actual shape of the template depends on the map projection used; in this case an orthomorphic conical projection, on which the track closely approximates to a straight line. The two tracks obtained are shown in Fig. 1, from which the times and positions given in Table I were derived. The errors shown are maximum errors. The error in the longitude represents the maximum amount by which the whole track may be shifted laterally.

Table I

Date	Latitude	Longitude	Time N.Z.S.T.
Oct 9th	$-39^\circ 00'$	$167^\circ 24' \text{ E } \pm 30'$	20 h. 03 m. 23 s ± 5 s
Oct 9th	$-31^\circ 00'$	$172^\circ 40' \text{ E } \pm 30'$	20 h. 05 m. 52 s ± 5 s
Oct 12th	$-44^\circ 00'$	$152^\circ 34' \text{ E } \pm 20'$	19 h. 57 m. 58 s ± 5 s
Oct 12th	$-35^\circ 00'$	$159^\circ 31' \text{ E } \pm 20'$	20 h. 00 m. 52 s ± 5 s

From these tracks an estimate of the height of the rocket was obtained, using the elevations derived from the star checks and the relation between height, ground range and elevation given by

$$d = R \left(\frac{\cos h}{\cos (h + \theta)} - 1 \right)$$

where d is the height of the orbit, R the radius of the Earth, h the elevation, and θ is given by $\theta = R/r$ radians, r being the ground range. The mean height for the portion of the orbit observed was 334 miles, standard error 14 miles, on October 9th, and 323 miles, standard error 8 miles, on October 12th. These values are consistent with the elements of the satellite orbit published in "Nature" [1].

3. Discussion of Results

Between October 9th and 12th, the track of the rocket shifted $10^{\circ}43' \pm 36'$ in longitude. When allowance is made for the sidereal time difference between the times of reappearance at the same point in the orbit a mean regression of the nodes of $11'36'' \pm 48''$ per revolution is obtained.

This figure may be compared with that derived from the theory of SPITZER [2], and of BLITZER, WEISFELD and WHEELON [3, 4], who considered the perturbations introduced in a satellite orbit by the oblateness of the Earth. Their theory yields an expression for the regression per revolution, $\Delta\lambda$, of

$$\Delta\lambda = 2\pi J \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{1}{(1 - e^2)^2} \cos i \text{ radians/rev.}$$

where $J = 3/2 (C - A)/(MR^2)$ is a constant depending on the oblateness of the Earth, as derived from gravity measurements (see JEFFREYS [5]), R , the equatorial radius of the Earth, a , the semi-major axis of the orbit and i , the inclination of the orbit to the Equatorial plane.

The values used by us were

$$\begin{aligned} R &= 6378 \text{ Km}, & J &= 1.637 \times 10^{-3}, \\ i &= 65^{\circ}, & a &= 6941 \text{ Km.} & e &= 0.0512. \end{aligned}$$

The value of a was based on a mean orbital period of 95 mins. 55 secs, as determined from our observations. It results in a mean height of 563 Km. (350 miles) and this is consistent with our mean heights and other reports, in particular the value of a by LAUTMAN, SLOWEY and McCROSKY quoted in [1], which yields $a = 6946$.

The theoretical regression is then found to be $12'41'' \pm 30''$, the error quoted being that corresponding to an error in a of 50 Km and in i of 1° , the latter making the larger contribution. The factor arising from the eccentricity makes a difference of only 1 part in 200 in this case.

From present estimates of the value of the orbital inclination it would appear that the value obtained for the theoretical regression may be low, indicating a significant discrepancy between theoretical and observed values. Perturbations due to the Sun and Moon are negligible, and the higher order terms in the Earth's gravitational potential function would not appear to be sufficient to account for the difference.

Acknowledgements

The encouragement of Professors A. G. McLELLAN and D. F. LAWDEN, the assistance of Mr. R. L. CURRIE, and the cooperation by members of the New Zealand public are gratefully acknowledged.

References

1. Nature **180**, 784 (1957): News and Views.
2. L. SPITZER, Perturbations of a Satellite Orbit. J. Brit. Interplan. Soc. **9**, 131 (1950).
3. L. BLITZER, M. WEISFELD, and A. D. WHEELON, Oblateness Perturbation of a Satellite Orbit. J. Appl. Physics **27**, 1141 (1956).
4. L. BLITZER and A. D. WHEELON, Oblateness Perturbation of Elliptical Satellite Orbits. J. Appl. Physics **28**, 279 (1957).
5. H. JEFFREYS, The Earth, Its Origin, History and Physical Constitution, 3rd ed., p. 184. Cambridge, Great Britain: University Press, 1952.

Vol.
3

1957

On Determining the Orientation of a Cylindrical Artificial Earth-Satellite¹

By

R. J. Davis², R. C. Wells³, and F. L. Whipple^{2,4}

(With 1 Figure)

(Received March 15, 1957)

Abstract. There are certain advantages to be gained by using the spent third stage of the satellite launching rocket as a separate satellite, to be observed for scientific data. If observations on such an object are to be useful, we must be able to determine its orientation observationally from the earth's surface to establish the coefficient of atmospheric drag.

A method is proposed for determining this orientation by observing the flash from a specularly reflecting cylindrical surface. Only half the surface would be made specularly reflecting; the other half would be a diffuse reflector to allow continuous observation of the object as well.

We have derived expressions from which one can determine the orientation of the cylinder from observations of the flash. We have assumed that the cylinder is tumbling extremely slowly, if at all. Although the problem of the more rapidly tumbling cylinder is also soluble, we do not discuss it in this paper, further than to suggest a test for tumble.

We have also experimentally determined the probability of obtaining sufficient observations of the flash to be useful. With our proposed positioning of observers, we would obtain the required three flash observations at approximately 20 percent of our observing locations. We believe that this probability is high enough to insure the success of a program based upon a cylindrical satellite such as that suggested here, provided there is no physical deterioration or deformation of the satellite during launching.

Zusammenfassung. Falls die dritte Stufe der einen Satelliten emportragenden Rakete selbst als gesonderter Satellit verwendet wird, um zur Gewinnung wissenschaftlicher Daten beobachtet zu werden, ergeben sich daraus bestimmte Vorteile. Wenn die Beobachtungen eines solchen Objektes von Nutzen sein sollen, muß man durch Beobachtung von der Erdoberfläche aus seine Orientierung verfolgen können, um den Koeffizienten des atmosphärischen Widerstandes zu ermitteln.

Die Verfasser schlagen eine Methode zur Bestimmung dieser Orientierung vor, indem die Lichtblitze von einer auffallend reflektierenden zylindrischen Oberfläche beobachtet werden. Bloß die halbe Oberfläche würde stark reflektierend ausgestaltet werden; die andere Hälfte müßte ein diffuser Reflektor sein, um eine Dauerbeobachtung des Objektes zu ermöglichen.

Es wurden Gleichungen abgeleitet, aus denen die Orientierung des Zylinders aus Beobachtungen der Reflexionsblitze ermittelt werden kann. Dabei wurde ange-

¹ Part of this research was conducted under a grant from the National Science Foundation for the International Geophysical Year.

² Harvard College Observatory, Cambridge, Mass., USA.

³ A. D. Little Co., Inc., Cambridge, Mass., USA.

⁴ Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Mass., USA.

nommen, daß sich der Zylinder nur äußerst langsam umwälzt, wenn überhaupt. Obwohl auch das Problem eines sich schneller umwälzenden Zylinders lösbar ist, wird es von den Verfassern in der vorliegenden Arbeit nur soweit erörtert, als ein Nachweis für eine solche Bewegung vorgeschlagen wird.

Die Wahrscheinlichkeit, eine brauchbare Zahl ausreichender Beobachtungen des Aufblitzens zu erhalten, war Gegenstand einer experimentellen Bestimmung. Mit der von den Verfassern vorgeschlagenen Anordnung von Beobachtern würden die erforderlichen drei Lichtblitzbeobachtungen an ungefähr 20% der Beobachtungsstellen erhalten werden. Es ist anzunehmen, daß diese Wahrscheinlichkeit groß genug ist, um den Erfolg eines Programmes zu sichern, das auf einem zylindrischen Satelliten beruht, wie er hier vorgeschlagen wird. Vorausgesetzt wird dabei, daß während des Aufstieges keine physische Beschädigung oder Deformierung des Satelliten erfolgt.

Résumé. Le troisième étage d'une fusée de lancement peut aussi devenir un satellite dont l'observation présenterait un intérêt scientifique. Pour qu'elle puisse servir à la mesure de la traînée atmosphérique il faut que l'orientation du corps puisse être suivie de la terre.

Une méthode est suggérée à cet effet. Elle consiste à observer l'éclat d'une réflexion spéculaire sur une moitié de la surface cylindrique du corps; l'autre moitié étant un réflecteur diffus permettant une observation continue.

Les expressions permettant de déduire des observations lumineuses l'orientation du cylindre ont été obtenues dans l'hypothèse où ce dernier ne tourne que lentement ou pas autour d'un axe transversal. Quoique le problème du cylindre en rotation plus rapide puisse être résolu, la discussion ne va pas au delà d'une suggestion pour un test de rotation rapide.

La probabilité de recueillir un nombre utile d'observations a fait l'objet d'une détermination expérimentale. Nous estimons que les positions proposées pour les observateurs permettraient d'enregistrer les trois éclairs de réflexion requis en 20% environ du nombre de postes d'observation. Cette probabilité semble suffisante pour assurer le succès d'un programme basé sur un satellite de forme cylindrique, pour autant qu'il n'ait pas été déformé par les opérations de lancement.

One of the major purposes of launching and observing artificial earth satellites is to determine the density of air to extreme altitudes. For this purpose, the satellite must have a known air-drag cross section, and if a nonspherical satellite is to be used, we must have an observational method of determining its orientation. Unless the drag can be allowed for accurately, the value of the scientific results based upon optical satellite observations will be seriously diminished.

One of the authors has proposed using the spent shell of the third stage of the launching rocket in the determination of air drag. If this could be done we would, in effect, get two satellites for the price of one. Or, alternatively, we would eliminate the need of housing the experimental gear and telemetering equipment in a large spherical satellite, and could house this equipment instead in a more compact unit specifically designed for the purpose.

We assume that the third stage of the launching rocket will be a cylinder approximately 48 inches long and 18 inches in diameter. If it were painted so as to be a diffuse reflector, to an observer on the earth the cylinder would appear slightly brighter than a spherical satellite of 20-inch diameter. ZIRKER, WHIPPLE, and DAVIS (1956) have determined that under the most favorable conditions such a sphere would appear brighter than 6th magnitude. For a sphere, optimum conditions would exist when it was on the side of the sky opposite the sun, at an altitude of about 60°, and at the standard height of 200 miles above the earth's surface. If the cylinder were a diffuse reflector, however, we could ascertain almost nothing about its orientation.

If the cylinder were a specular reflector it would normally be invisible, since the reflected light from the sun would be concentrated into a conical region, with the axis of the cone coinciding with that of the cylinder, and the sun lying on the invisible branch of the cone. Since the sun presents an angular diameter of 0.5° and the satellite presents a diameter of less than $1''$ of arc, the actual illuminated region would lie between two cones having semiapex angles differing by 0.5° .

We shall deal with the problem on a strictly geometrical basis to obtain an estimate of the brightness of the flash. We assume that sunlight is reflected uniformly by the diffuse cylinder. The reflected radiation is thus spread out uniformly over approximately 46,000 square degrees. The light reflected by the specular cylinder, on the other hand, is concentrated into a conical region of angular area (as seen from the satellite) of $(0.5^\circ) \times (360^\circ) \times \sin \theta$, where θ is the semiapex angle of the cone and equals the angle between the axis of the cylinder and the direction from the satellite to the sun. Using the purely geometrical formulation given above, we find that

$$\frac{\text{Brightness of specular reflection}}{\text{Brightness of diffuse reflection}} = \frac{46\,000 \text{ sq. degrees}}{(180 \text{ sq. degrees}) \times \sin \theta}$$

so that, even when $\sin \theta$ reaches its maximum value of 1.0, the flash is 257 times as bright as the diffuse reflection; this ratio corresponds to an increase of 6 magnitudes in brightness. The average value of $\sin \theta$ is $2/\pi$, so that under average conditions the flash would be nearer to 6.5 magnitudes brighter than the diffuse reflection. The formula fails, of course, for small values of $\sin \theta$, since we are not dealing with a single cone, but with a region between two cones. The flash of maximum intensity occurs when $\sin \theta = 0$. The specular reflection is then concentrated into a cone of semiapex angle 0.25° , which therefore presents an angular area of $\pi \times (0.25^\circ)^2 = 0.2$ square degrees at the satellite. This maximum flash would therefore be 13.6 magnitudes brighter than the corresponding diffuse reflection. It must be pointed out, however, that this maximum flash could not be observed, since it could occur only with the satellite directly in front of the sun.

A cylinder that is diffusely reflecting on one end and specularly reflecting on the other would combine the best properties of each type of reflection. The satellite would be continuously visible as a body having very nearly the same brightness as a 20-inch spherical satellite. In addition, flashes would frequently be observed, about 6.5 magnitudes brighter than the usual magnitude of the object; from these flashes, the orientation could be obtained. If the object is not tumbling, or is tumbling very slowly, these flashes will last at least 0.5 seconds. Magnetic effects are expected to damp out most tumbling and rotation after the cylinder has made a considerable number of revolutions about the earth. The problem is then to determine the probability of our observing these flashes at the surface of the earth, and to derive expressions to give the orientation from these observations.

The first problem was easier to solve experimentally than analytically. Therefore we constructed as a model a specular cylinder 3 inches long and $3/4$ inches in diameter. We used a flashlight to represent the sun and studied the position of the reflection as we varied the orientation and position of the satellite. We found that the flash intersected the surface of the earth about 25 percent of the time when the satellite was at an altitude greater than 20° . A probability of this order should enable us to keep track of the orientation of the satellite well enough for the measurement of air density.

Let us now examine the problem of determining the orientation from the observations. The known quantities are the position of the sun, the position of the satellite, and the position of each observer, at the time each flash is seen.

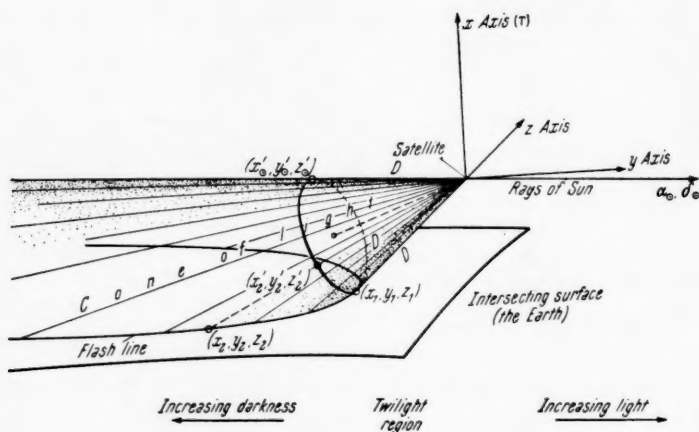


Fig. 1. Geometry of cylindrical reflection

If two observers note the flash simultaneously, we must determine the direction of the axis of a cone that contains these two observers and the sun, and whose apex lies at the known position of the satellite. Since we have three known lines in space intersecting at a point, we can, by terminating these lines at equal distances from this apex, determine three points lying in a plane perpendicular to the axis of the cone. If we set up a right-handed rectangular coordinate system with origin at the satellite, z -axis directed toward the north celestial pole, and x -axis directed toward the first point of Aries, we can find the direction components of the axis of the satellite as follows (see Fig. 1):

Let (x_1, y_1, z_1) and (x_2, y_2, z_2) be the coordinates of the two observers in the coordinate system specified above. Let $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ be the right ascension and declination of the sun as seen from the satellite. We must now find points on our three elements of the cone equidistant from its apex. Let the coordinates of these points be (x'_1, y'_1, z'_1) , (x'_2, y'_2, z'_2) , and $(x'_\odot, y'_\odot, z'_\odot)$. We shall now define

$$D_i^2 \equiv x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

and set $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1$, and $z'_1 = z_1$. We then have

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x_i D_1 / D_i \\ y'_i &= y_i D_1 / D_i \\ z'_i &= z_i D_1 / D_i \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

We also have

$$\left. \begin{aligned} x'_\odot &= -D_1 \sin \alpha_\odot \cos \delta_\odot \\ y'_\odot &= -D_1 \cos \alpha_\odot \cos \delta_\odot \\ z'_\odot &= -D_1 \sin \delta_\odot \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

The direction components of the axis of the cylinder will be

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} y_1' & z_1' & 1 \\ y_2' & z_2' & 1 \\ y_{\odot}' & z_{\odot}' & 1 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} z_1' & x_1' & 1 \\ z_2' & x_2' & 1 \\ z_{\odot}' & x_{\odot}' & 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_{\odot}' & y_{\odot}' & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

The axis of the cylinder will then point toward the equatorial coordinates given by

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{C}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}} \\ \cos \alpha &= \frac{A}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}} \frac{1}{\cos \delta} \\ \sin \alpha &= \frac{B}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}} \frac{1}{\cos \delta} \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

It is highly unlikely that two observations of the flash will be made simultaneously. Even if this event occurs, we must have at least one additional observation, taken at a different time, to ascertain whether the object is tumbling. If our observations are separated in time, we can advance our lines of position in accordance with usual navigational procedure:

$$\left. \begin{aligned} x_i(t_i) - x_i(t_1) &= x_0(t_i) - x_0(t_1) \\ y_i(t_i) - y_i(t_1) &= y_0(t_i) - y_0(t_1) \\ z_i(t_i) - z_i(t_1) &= z_0(t_i) - z_0(t_1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

where t_i represents the time the flash was observed at the i th station, and the subscript 0 refers to the position of the object. Of course, $x_0(t_1) = y_0(t_1) = z_0(t_1) = 0$. The position of the satellite at time t_i , relative to its position at time t_1 , can be obtained from its orbital parameters. If the satellite is not tumbling, observations of the flash made at three stations will agree as to the direction of the axis of the cylinder. If it is tumbling, the three observations will not agree as to direction, and we must then use these data to solve for the direction of the tumble axis and speed of the tumbling. We shall not go into the determination of these quantities; the formulae could easily be derived if we should need them.

We have considered what procedure is best for observing the flashes. Our experiments with the satellite model suggest that we should place the observers along the arms of a cross. We calculate the position likely to contain the satellite, at a time when it is illuminated by the sun and the observer is in twilight or darkness, and place the center station of the observing cross directly beneath this position. Other stations would be placed along the arms of this cross at 50-mile intervals for a perigee observation, and at 200-mile intervals for an apogee observation. There would be a total of nine stations in each observing cross. One arm of the cross would be parallel to the track of the satellite. At least one observer in such a network should observe the flash on about 50 percent of the times when the satellite is visible. Since the observers are placed in positions such that flash observations are not statistically independent, triple observations

of the flash should occur at least 20 percent of the time. The flash will be bright enough for amateurs to observe it adequately even without optical aids. Methods would need to be worked out to eliminate erroneous observations and to obtain accurate data on time and position. These problems would seem to be less serious for flash observations than for ordinary Moonwatch observations, however, so that they should be very easy to solve.

It should be emphasized that the above comments are based upon strictly geometrical considerations. They do not consider diffraction, deterioration of the specular surface, distortion of the cylinder, atmospheric absorption and refraction, etc.

We suggest the name "Barber Pole" for this type of satellite. We believe that much useful scientific information could be obtained from such a satellite at almost no additional cost.

Reference

- J. B. ZIRKER, F. L. WHIPPLE, and R. J. DAVIS, in: VAN ALLEN (ed.), *Scientific Uses of Earth Satellites*, p. 23. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1956.

Vol.
3
1957

A Note on Goddard's Problem

By

G. Leitmann¹, BIS

(With 2 Figures)

(Received February 11, 1957)

Abstract. In Ref. [1] GODDARD's problem of thrust optimization was discussed. It was shown that, in addition to an initial boost, a boost at burn-out may be required if both the altitude and velocity to be reached are specified. However, no account was taken of variation in burning time. In this note it is shown that such a variation must be considered for the case of second boost.

Zusammenfassung. In [1] wurde das GODDARDSche Problem des optimalen Schubes behandelt. Es wurde gezeigt, daß eine diskontinuierliche Geschwindigkeit sowohl am Brennanfang als auch am Brennschluß erforderlich ist, falls die zu erreichende Höhe und Geschwindigkeit vorgeschrieben sind. Die Variation in der Brennzeit wurde aber nicht in Betracht gezogen. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß eine solche Variation behandelt werden muß, falls die Geschwindigkeit am Brennschluß diskontinuierlich ist.

Résumé. Dans la référence [1] il a été établi que le problème de GODDARD pour l'optimisation de la poussée requiert, en plus d'une impulsion initiale, une impulsion terminale en vue de satisfaire simultanément aux valeurs prescrites pour l'altitude et la vitesse finales. Cependant les variations dans la durée de combustion n'étaient pas prises en considération. La présente note montre que cette variation intervient dans le calcul de la seconde impulsion.

I. Introduction

In Ref. [1] a Calculus of Variations solution was presented for GODDARD's classical problem of minimizing the initial mass of a rocket required to reach specified altitude and velocity. In the discussion of this problem no account was taken of the variation of burning time for "neighboring" trajectories, since previous analysis had shown that such variation yields no new relation when the specified altitude is the summit altitude, i.e. when the specified velocity is zero. It was shown that when the specified velocity is not zero, a case (denoted by (b) in Ref. [1]) can arise for which the transversality condition can be satisfied only when a boost at burn-out is permitted. Further analysis has shown that in the latter case, the variation in burning time must be considered. It is the purpose of this note to correct the derivation of [1] to that extent.

¹ Aeroballistics Analysis Branch, U.S. Naval Ordnance Test Station, China Lake, Calif., USA. Now Department of Engineering, University of California, Berkeley, Calif., USA.

II. Theory

In order to save space the reader is referred to [1] for a statement of the problem. All symbols and definitions are those of [1], as is the method of solution. For "neighboring" trajectories

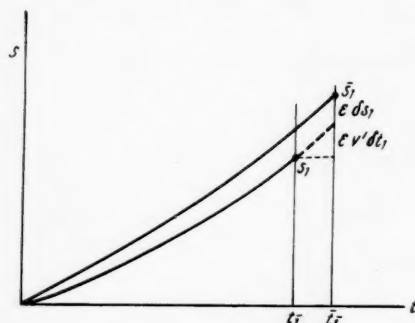


Fig. 1

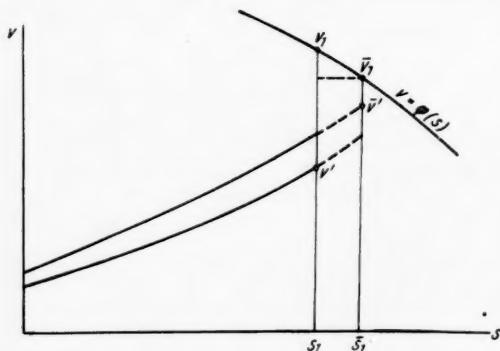


Fig. 2

$$\bar{s} = s + \epsilon \delta s$$

$$\bar{v} = v + \epsilon \delta v$$

$$\bar{M} = M + \epsilon \delta M$$

$$\bar{t}_1 = t_1 + \epsilon \delta t_1. \quad (1)$$

From Fig. 1 it is seen that

$$\bar{s}_1 \equiv \bar{s}_1 = s_1 + \epsilon \delta s_1 + \epsilon v' \delta t_1. \quad (2)$$

Similarly, corresponding to \bar{s}_1

$$\bar{M}' = M' + \epsilon \delta M' + \epsilon \dot{M}' \delta t_1$$

$$\bar{v}' = v' + \epsilon \delta v' + \epsilon \dot{v}' \delta t_1. \quad (3)$$

From Fig. 2 it then follows that

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 - v_1 &= \frac{d\varphi}{ds_1} (\bar{s}_1 - s_1) \\ &= \frac{d\varphi}{ds_1} (\epsilon \delta s_1 + \epsilon v' \delta t_1). \end{aligned} \quad (4)$$

If no boost occurs at burn-out

$$v' = v_1$$

$$M' = M_1 = \bar{M}' \quad (5)$$

so that

$$\delta M' \equiv \delta M_1 = -\dot{M}' \delta t_1. \quad (6)$$

We recall that eq. (1.14) of [1] is

$$\begin{aligned} c(1-k) [\lambda_1^0 \delta M^0 - \lambda_1' \delta M'] &= \lambda_2' \delta s' - \lambda_2^0 \delta s^0 + \lambda_1' M' \delta v' - \lambda_1^0 M^0 \delta v^0 \\ &+ \int_{0+}^{t_1} \left\{ \left[\lambda_1 M^{2/3} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial s} - \dot{\lambda}_2 \right] \delta s \right. \\ &+ \left[\lambda_1 M^{2/3} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} - \lambda_1 \dot{M} - \dot{\lambda}_1 M - \lambda_2 \right] \delta v \\ &+ \left[\lambda_1 (\dot{v} + g) + \frac{2}{3} \lambda_1 \mathfrak{D} M^{-1/3} - \dot{\lambda}_1 c(1-k) \right] \delta M \Big\} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

The integrand of (7) leads to the EULER-LAGRANGE equation, eq. (1.18) of [1]. For the case of v continuous at burn-out, eqs. (3)₂ and (4) lead to

$$\begin{aligned} \delta v_1 \equiv \delta v' &= \left(\frac{d\varphi}{ds_1} v' - \dot{v}' \right) \delta t_1 + \frac{d\varphi}{ds_1} \delta s' \\ &= \left(\frac{d\varphi}{ds_1} v_1 - \dot{v}_1 \right) \delta t_1 + \frac{d\varphi}{ds_1} \delta s_1. \end{aligned} \quad (8)$$

From eq. (7) with (6) and (8) it follows that

$$\begin{aligned} c(1-k)\lambda_1^0 \delta M^0 &= -c(1-k)\lambda_1' \dot{M}' \delta t_1 \\ &\quad + \lambda_2' \delta s_1 + \lambda_1' M_1 \left(\frac{d\varphi}{ds_1} v_1 - \dot{v}' \right) \delta t_1 \\ &\quad + \lambda_1' M_1 \frac{d\varphi}{ds_1} \delta s_1 - \lambda_1^0 M^0 \delta v^0. \end{aligned} \quad (9)$$

But

$$c(1-k)\delta M_0 = c(1-k)\delta M^0 + M^0 \delta v^0 \quad (10)$$

so that for $\delta M_0 = 0$, eq. (9) becomes

$$\begin{aligned} \lambda_1' \left[M_1 \left(\frac{d\varphi}{ds_1} v_1 - \dot{v}' \right) - c(1-k)\dot{M}' \right] \delta t_1 \\ + \left[\lambda_2' + \lambda_1' M_1 \frac{d\varphi}{ds_1} \right] \delta s_1 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

However, from the equation of motion, eq. (1.8) of [1], we have

$$\begin{aligned} c(1-k)\dot{M}' + M_1 \dot{v}' &= -M_1 g - M_1^{2/3} \mathfrak{D}_1 \\ &= -M_1 g - D_1 \end{aligned} \quad (12)$$

so that the coefficient of δt_1 in eq. (11) is merely the equation of free flight and hence vanishes. The coefficient of δs_1 must then also be equal to zero, i.e.

$$\lambda_2' + \lambda_1' M_1 \frac{d\varphi}{ds_1} = 0. \quad (13)$$

In view of eq. (1.17) of [1], eq. (13) leads to the transversality condition for the case of v continuous at burn-out, i.e.

$$q(s_1) \left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} + \frac{\mathfrak{D}}{3c(1-k)} \right]_{t=t_1} = M_1^{1/3} g + \mathfrak{D}_1 \quad (14)$$

which is eq. (1.25) of [1]. Eq. (14) together with the solution of the free flight equation can then be solved for s_1 and v_1 .

If eq. (14) and the solution of the free flight equation cannot both be satisfied, as in case (b) of [1], a discontinuity in v must be permitted at burn-out since

$$v' < \dot{S}. \quad (15)$$

Then

$$v_1 = \dot{S} \quad (16)$$

at

$$s_1 = S \quad (17)$$

must be attained by boost

$$M' e^{\frac{v'}{c(1-k)}} = M_1 e^{\frac{v_1}{c(1-k)}}. \quad (18)$$

In that case, there is no free flight. However, from Fig. 2 it is clear that when

$$v_1 = \bar{v}_1 = \dot{S}, \quad (19)$$

$$\bar{s}_1 = s_1 = S \quad (20)$$

so that

$$\delta s' \equiv \delta s_1 = -v' \delta t_1. \quad (21)$$

From eq. (18) with (3) it follows that

$$c(1-k)(\delta M' + \dot{M}' \delta t_1) + M'(\delta v' + \dot{v}' \delta t_1) = 0 \quad (22)$$

so that, for $\delta M_0 = 0$, eq. (7) again leads to the EULER-LAGRANGE equation and also

$$\lambda_2' \delta s' - \lambda_1' [c(1-k) \dot{M}' + M' \dot{v}'] \delta t_1 = 0. \quad (23)$$

In view of eq. (21) and the equation of motion, eq. (23) becomes

$$\lambda_2' v' - \lambda_1' [Mg + M^{2/3} \mathfrak{D}]_{t=t_1-} = 0. \quad (24)$$

Elimination of λ_1' and λ_2' by means of eq. (1.17) of [1] reduces eq. (24) to

$$v' \left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} + \frac{\mathfrak{D}}{3c(1-k)} \right]_{t=t_1-} = [M^{1/3}g + \mathfrak{D}]_{t=t_1-}. \quad (25)$$

Eq. (25) is then the transversality condition for the case of v discontinuous at burn-out. It replaces eq. (1.24) of [1]. Eq. (25) with (16) and (17) can be solved for v' . Eq. (2.15) of [1] is also modified in conformity with eq. (25).

Reference

1. G. LEITMANN, A Calculus of Variations Solution of GODDARD's Problem. *Astronaut. Acta* **2**, 55 (1956).

Die Eigenschaften von Wasserstoff und Wasser als Arbeitsgase für kernenergetisch beheizte Raketentriebwerke¹

Von

Irene Sänger-Bredt², DGRR

(Mit 14 Abbildungen)

(Eingegangen am 8. Januar 1957)

Zusammenfassung. In einigen technischen Anwendungsbereichen, speziell bei Raketen extrem hoher Reichweiten, wäre es erwünscht, einem Arbeitsmedium in einem Kessel eine um mehrere Zehnerpotenzen höhere Energie, als sie bisher bei Dampfkesseln zur Verfügung stand, zuzuführen, um danach dieses Arbeitsmedium sehr hoher Enthalpie durch Expansion in einer LAVAL-Düse auf möglichst hohe Ausströmgeschwindigkeit zu beschleunigen. Die technischen Schwierigkeiten bei dieser Aufgabenstellung liegen nicht nur in der Aufheizung eines geeigneten Arbeitsmediums auf eine genügend hohe Enthalpie, sondern mehr noch in der Beherrschung der bei dieser hohen Feuergasenthalpie stattfindenden Wärmeübergänge an die feuerberührten Behälterwände.

Unter diesen Gesichtspunkten werden Wasserstoff und Wasserdampf auf ihre Eignung als Arbeitsgas untersucht.

Es werden für beide Gase Enthalpie-Entropie-Diagramme unter völliger Berücksichtigung aller stattfindenden Dissoziationen und Ionisationen im Druckbereich zwischen 10^{+1} und 10^{-5} at und im Temperaturbereich zwischen 500 und 10 000° K berechnet und daraus die für Wasser bzw. Wasserdampf bei entsprechenden Energiezufuhren und unter Voraussetzung von Gleichgewichtsverhältnissen möglichen Ausströmgeschwindigkeiten bei verschiedenen Druckgefällen in der Düse abgeleitet und miteinander verglichen. Hierauf werden Einfluß der spezifischen Gemischwärmen und der mittleren Molekulargewichte vor und nach der Aufheizung auf die erreichbaren Ausströmgeschwindigkeiten an den Rechenbeispielen des Wasserstoffs, des Wassers und des Heliums herausgeschält. Auf Grund der hierbei gewonnenen Erkenntnisse werden weitere Hydride leichter Elemente auf ihre Verwendbarkeit als Arbeitsgase hin untersucht und unter ihnen Bor(III)-Wasserstoff und Methan zur genaueren Berechnung empfohlen.

Nächst den Ausströmgeschwindigkeiten werden mit Hilfe von bereits früher eingeführten Parametern die bei Gleichgewichtsverhältnissen auftretenden Wärmeübergänge an die Feuerraumwände für Wasserstoff, Wasser und Helium vergleichsweise untersucht.

Endlich wird noch der Einfluß von Nichtgleichgewichtsvorgängen auf Aufheizung und Entspannung besprochen. Es wurden zunächst drei charakteristische hypothetische Grenzfälle von unvollständiger Gleichgewichtseinstellung nebeneinander

¹ Nach einem Vortrag anlässlich der 8. Jahreshauptversammlung der „Deutschen Gesellschaft für Raketentechnik und Raumfahrt“, Stuttgart, 22. bis 24. November 1956.

² Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe e.V., Stuttgart-Flughafen, Bundesrepublik Deutschland.

betrachtet und die in allen drei Fällen in der Düsenmündung bei gleichen thermodynamischen Anfangsbedingungen in der Brennkammer gewinnbaren kinetischen Energien bei Wasserstoff und Wasser vergleichsweise berechnet. Danach wird erwogen, wie weit und in welcher Form man bei Aufheizung eines Arbeitsgases durch Fremdenergie mit Abweichungen vom Energiegleichgewicht tatsächlich rechnen muß.

Insbesondere drei Methoden einer Arbeitsgas-Aufheizung, nämlich mit Hilfe von Spaltungsreaktoren, mit Lichtbögen oder mit Fusionsreaktoren, werden untersucht. Dabei ergibt sich, daß bei der Durchmischung energiearmer Arbeitsgase mit Elementarteilchen hoher Energie eine besondere Form der Gleichgewichtsabweichung eine Rolle spielen kann, die durch eine Überbesetzung des Ionisationsfreiheitsgrades in der Heizkammer charakterisiert ist. Die hierdurch gebundene Aufheizungs-enthalpie ist wahrscheinlich bei der Ausströmung nur zu einem geringen Prozentsatz in kinetische Energie konvertierbar. Es werden Formeln entwickelt, die diese „primäre“ Ionisierung eines Arbeitsgases und den damit verbundenen Enthalpieverlust in Abhängigkeit von der Ionisierungsenergie des Arbeitsgases, dem Massenverhältnis von Arbeitsgaspartikel und Energieträgerpartikel und vom zahlenmäßigen Verhältnis beider Teilchensorten bei bekannten Heizkammertemperaturen und kinetischen Energien der Geschoßteilchen darstellen. Am Beispiel der Aufheizung von H_2 oder H_2O durch Elektronen- oder α -Teilchen-Beschuß werden die Energie- und Mischungsbereiche angegeben, in denen die Verluste durch primäre Ionisierung eine Rolle spielen. Schließlich wird mit Hilfe der Raketengrundgleichung noch die Zahl der pro Zeiteinheit dem Arbeitsgas zuzuführenden Energieträger, die einen bestimmten Schub oder eine bestimmte geforderte Ausströmgeschwindigkeit der Rakete gewährleistet, für die genannten Beispielfälle berechnet.

Abstract. In some fields of technical application — in particular with ballistic missiles of extremely long ranges — it would be desirable to employ a working medium, contained in a tank, with an energy higher by several orders of magnitude than has hitherto been available with steam boilers, and thereupon, to accelerate this working medium, possessing a very high enthalpy, by expansion in a LAVAL-type-nozzle to the highest exhaust velocity possible. The technical difficulties inherent in this problem do not only consist of heating a suitable working medium to a sufficiently high enthalpy, but are even more to be found in controlling such high gas enthalpies with the tank walls exposed to the incandescent gas.

Under these aspects, hydrogen and water vapor have been investigated as to their applicability as working fluids.

Enthalpy-entropy diagrams have been computed for either gas, with complete regard to dissociation, as well as ionization, over the pressure range between 10^{+1} and 10^{-8} atm, and within the temperature range between 500 and 10,000 °K. Therefrom, the exhaust velocities possible for water, or water vapor, have been derived and compared with one another, with suitable supplies of energy, and on the assumption of equilibrium ratios, at various pressure gradients in the nozzles. The influence of the specific heats of mixtures and the mean molecular weights, on the exhaust velocities attainable — before and after heating — have been shown in numerical examples for hydrogen, water, and helium. On the strength of the findings, additional hydrides of light elements have been examined as to their applicability as working fluids and among these, boron (III)-hydride, as well as methane, are recommended for more detailed computation.

In addition to the exhaust velocities, the heat transfers to the combustion chamber walls, occurring with equilibrium ratios, have been examined by way of comparisons of hydrogen, water, and helium, using parameters introduced earlier.

The influence exerted by non-equilibrium processes on heating and expansion has been discussed. First, three characteristic, hypothetical limiting cases of incomplete equilibrium setting are examined, comparatively. The kinetic energies obtainable in all three cases in the nozzle exit, with equal thermodynamic initial conditions in the combustion chamber, are comparatively computed with hydrogen and water. Thence, the probable extent and the form taken by divergencies from the

energy equilibrium, that must actually be taken into account, when a working fluid is heated by means of an external energy source, have been considered.

In particular, three methods of heating a working fluid have been investigated, namely fission reactors, arcs and fusion reactors. Thereby the possibility arises that, when low-grade energy working fluids are blended with high-grade energy elementary particles, a special type of divergence from equilibrium may be important — this type of divergence being characterized through an overpopulation of the degree of freedom of ionization within the combustion chamber. The enthalpy bound by this process is, during discharge, probably convertible into kinetic energy but to a very small degree. Terms have been developed, representing this "primary" ionization of a working fluid, and the accompanying loss of enthalpy, as functions of the ionization energy of this working fluid, of the mass ratio of working fluid particles and energy carrier particles, as well as of the numerical ratio of either type of particle — with known temperatures of the combustion chamber and kinetic energies of the projectile particles. The ranges of energy and mixture, in which losses through primary ionization are important, have been indicated through the example of the heating-up of H_2 or H_2O by means of bombardment with electrons or α -particles. By means of the basic rocket equation the number of energy carriers to be supplied to the working fluid per unit time has been computed for the above examples — this number guaranteeing a definite thrust, or a definite, required, exhaust velocity of the rocket.

Résumé. Dans certains domaines, et plus spécialement celui des fusées à très grande portée, il est souhaitable de donner au gaz de travail une énergie beaucoup plus grande (facteur 10^6) que celle dont il dispose par exemple dans une chaudière à vapeur. Un gaz de travail ayant une telle enthalpie pourrait alors, par détente dans une tuyère de LAVAL, atteindre de très grandes vitesses d'écoulement. Les difficultés techniques qui se présentent concernent non seulement l'apport de la quantité de chaleur suffisante mais surtout le contrôle du flux thermique le long des parois de la chambre.

C'est de ce point de vue que sont examinées les possibilités de l'hydrogène et de la vapeur d'eau en tant que gaz de travail.

Les diagrammes enthalpie-entropie des deux gaz sont établis pour des pressions comprises entre 10^{-5} et 10^{+1} atm. et des températures de 500 à 10 000° K en tenant compte de tous les effets de dissociation et d'ionisation. Si l'on admet que les conditions d'équilibre sont toujours satisfaites les vitesses d'écoulement correspondantes en fin de tuyère peuvent être calculées en fonction de la chute de pression.

L'influence des chaleurs spécifiques et des poids moléculaires moyens, avant et après réchauffage, sur les vitesses d'écoulement possibles est ensuite évaluée à l'aide d'exemples numériques, pour l'hydrogène, l'eau et l'hélium. Les possibilités d'autres hydrures d'éléments légers ont été étudiées sur la base des résultats précédents; elles suggèrent d'approfondir les calculs pour l'hydrure de bore(III) et le méthane.

Suit une étude comparative de l'hydrogène, de l'eau et de l'hélium du point de vue des flux calorifiques le long des parois de la chambre. Elle se sert des paramètres introduits à l'occasion de l'étude des vitesses d'écoulement.

L'influence des écarts à l'équilibre sur le réchauffement et la détente est finalement mise en discussion. Trois cas limite hypothétiques d'écart à l'équilibre ont été envisagés. Dans chacun d'eux l'énergie cinétique récupérable en fin de tuyère a été calculée et comparée pour l'hydrogène et la vapeur d'eau à partir de conditions initiales identiques. On estime ensuite quelle intensité et quelle forme prend l'écart à la condition d'équilibre théorique quand la source d'énergie calorifique est extérieure au gaz de travail.

Trois sources d'énergie ont été plus particulièrement envisagées: le réacteur à fission, l'arc électrique et le réacteur à fusion. Pour les mélanges de gaz pauvre en énergie et de particules qui en sont très riches une certaine forme de déséquilibre peut avoir son importance. Elle est caractérisée par une augmentation du degré de liberté d'ionisation; seul un faible pourcentage de l'enthalpie ainsi emmagasinée est récupérable sous forme cinétique à la sortie de la tuyère. Des formules déterminent

l'ionisation "primaire" du gaz de travail et les pertes d'enthalpie correspondantes en fonction de l'énergie d'ionisation du gaz, du rapport de masse entre les particules du gaz de travail et celles porteuses d'énergie et du rapport numérique des deux sortes de particules. La température de la chambre de combustion et l'énergie cinétique des particules de bombardement sont supposées connues. Les proportions de mélange et les quantités d'énergie pour lesquelles les pertes par ionisation "primaire" jouent un rôle sont indiquées dans le cas de l'hydrogène et de la vapeur d'eau bombardés à l'aide d'électrons ou de particules α . La formule de base des fusées permet en conclusion de déterminer la quantité de particules porteuses d'énergie nécessaire pour obtenir une poussée prescrite ou une certaine vitesse d'écoulement.

I. Der Begriff und die Rolle des Arbeitsgases bei Raketentriebwerken

In einigen technischen Anwendungsbereichen, speziell bei Raketen extrem hoher Reichweiten, wäre es erwünscht, einem Arbeitsmedium in einem Kessel eine um mehrere Zehnerpotenzen höhere Energie, als sie bisher bei Dampfkesseln zur Verfügung stand, zuzuführen, um danach dieses Arbeitsmedium sehr hoher Enthalpie durch Expansion in einer LAVAL-Düse auf möglichst hohe Ausströmgeschwindigkeit zu beschleunigen. Die technischen Schwierigkeiten bei dieser Aufgabenstellung liegen nicht nur in der Aufheizung eines geeigneten Arbeitsmediums auf eine genügend hohe Enthalpie, sondern mehr noch in der Beherrschung der bei dieser hohen Feuergasenthalpie stattfindenden Wärmeübergänge an die feuerberührten Behälterwände.

In einer früheren Untersuchung [18] wurde bereits gezeigt, daß für die in Raketen beherrschbaren Energiekonzentrationen auf Grund dieser Schwierigkeiten eine obere Grenze besteht, und daß diese Grenze wahrscheinlich höher liegt als die bei klassischen Verbrennungsprozessen, das heißt bei „Atomschalen“-Reaktionen, in der Größenordnung von 10^4 kcal/kg erzielbaren Werte, jedoch niedriger als die um mehrere Zehnerpotenzen größeren Beträge, die bei Kernreaktionen frei werden.

Um den Bereich zwischen den Energiekonzentrationen der klassischen Verbrennungsraketen mit mäßigen Auspuffgeschwindigkeiten und denen der technisch noch nicht beherrschbaren reinen Kernreaktionsraketen nutzbar zu machen, beabsichtigt man bekanntlich, das z. B. bei Kernfusionen oder bei Lichtbogen-aufheizung entstehende Feuergasplasma oder das aus β -Zerfallsprozessen entstammende Elektronengas oder irgendein anderes denkbare Energiekonzentrat in der Rakete zu *verdünnen*, indem man solchen Partikeln mit naturgemäß sehr hoher massenspezifischer Energie h_E und vernachlässigbar geringer Masse $m = n_E \cdot m_E$, deren Gesamtzahl n_E wir demnach als „Energieträger“ bezeichnen können, einen „Massenträger“ mit großer Gesamtmasse $M = n_A \cdot m_A$ bei vernachlässigbar geringem Energiegehalt h_A hinzufügt, um so die gewünschte, wärmetechnisch noch eben beherrschbare Offenenthalpie

$$h_0 = (m \cdot h_E + M \cdot h_A) / (m + M) \approx \frac{m}{m + M} \cdot h_E \quad (1)$$

zu erhalten. Bei einem Massenmischungsverhältnis $K = n_E m_E / (n_A m_A)$ von Energieträger zu Massenträger wird also das Verhältnis von unverdünnter Enthalpie zu Heizkammerenthalpie $h_E/h_0 = (K + 1)/K$. Die pro Masseneinheit des Feuergasgemisches gültige Heizkammerenthalpie h_0 setzt sich zusammen aus den Enthalpieanteilen von Energie- und Massenträger: $h_0 = (K \cdot h_{0(E)} + h_{0(A)}) / (K + 1)$. In dieser Beziehung bedeuten $h_{0(E)}$ die pro Masseneinheit des Energieträgers berechnete Energieträgerenthalpie und $h_{0(A)}$ die pro Masseneinheit des Massenträgers berechnete Enthalpie des Massenträgers nach der Mischung. Bei Vernach-

lässigung der Energieträgermasse wird $K=0$, also $h_0 = h_{0(A)}$. Den Massenträger nennen wir „Arbeitsgas“. Für die auf soeben beschriebene Art beheizten Raketen hat sich bisher die Bezeichnung „thermische Atomraketen“ eingebürgert. Vielleicht bezeichnet man sie aber treffender und allgemeingültiger als „Raketen mit ungekoppeltem Antriebssystem“, da der wesentliche Unterschied zwischen den reinen Schalen-, bzw. den reinen Kernreaktionsraketen einerseits und diesen Raketen mit zugemischtem, nicht an der Energieproduktion beteiligtem Fremdgas andererseits darin besteht, daß bei den letztgenannten Energie- und Massenträger nicht mehr identisch sind. Es gibt also im letzten Fall keine feste Kopplung mehr zwischen der Natur des Arbeitsgases und der Höhe der ihm zugeführten Energie, da sich das Mischungsverhältnis zwischen Energie- und Massenträger beliebig variieren läßt.

Selbstverständlich gelten die vorstehenden Überlegungen nicht nur beschränkt auf Raketen, sondern auch für Strahltriebwerke, bei denen Energie- und Massenträger nicht völlig an Bord mitgeführt werden, wie z. B. für Staustrahlrohre.

Da sich die optimalen Arbeitsbedingungen hinsichtlich Kesseldruck, Temperatur usw. für Raketen mit stoffgebundenem, zustandsunabhängigem Heizwert und für ungekoppelte Raketen — infolge der zusätzlichen Variationsmöglichkeit bei den letzteren — grundsätzlich voneinander unterscheiden, steht am Anfang aller diesbezüglichen Triebwerksentwicklung das Studium des thermodynamischen Verhaltens der verschiedenen Arbeitsgase und ihrer optimalen Arbeitsbedingungen zur Erzielung *möglichst hoher Auspuffgeschwindigkeiten bei möglichst geringen Wärmeübergängen*. Die überragende Bedeutung der Auspuffgeschwindigkeit für die Flugleistung einer Rakete darf in diesem Zusammenhang als bekannt [11, 19] vorausgesetzt werden.

Bei diesen einleitenden Untersuchungen werden zunächst einige grundsätzliche, teils vereinfachende, teils einschränkende, Annahmen gemacht, die bei späteren technischen Anwendungen wahrscheinlich nicht immer oder nicht immer völlig zutreffen dürften. Es werden nämlich:

1. unter Voraussetzung einer beliebig hohen, an verschwindend kleine Masse gebundenen Energiequelle und verzögerungsfreier, gleichmäßiger Übertragbarkeit von Energie aus dieser Quelle an das Arbeitsgas, nur „natürliche“ Arbeitsgase betrachtet, das heißt einheitliche Elementverbindungen in ihrer unter normalen irdischen Verhältnissen stabilen stöchiometrischen Zusammensetzung aus den verschiedenen Atomen und ihren Isotopen; also nicht etwa Mischungen zwischen Elementisotopen, Elementarteilchen und Photonen, wie sie tatsächlich beispielsweise aus einem Reaktor kommen;

2. zunächst nur Gleichgewichtszustände in Brennkammer und Entspannungsduße vorausgesetzt, sowie darüber hinaus homogene Druck- und Temperaturverteilung in der Brennkammer und in den einzelnen Düsenquerschnitten, bei eindimensionaler, isentropischer von Reibungs- und Strahlungsverlusten freier Strömung.

Die erstgenannte Einschränkung bedeutet praktisch, daß die Massen des Energieträgers vernachlässigt werden. Dies geschah einerseits, weil bei Berücksichtigung des tatsächlichen Gemisches aus Massen- und Energieträger die Zahl der möglichen Kombinationen von Massenträger, Energieträger und Mischungsverhältnis, also die Zahl der verschiedenen zu betrachtenden Gemische, außerordentlich hoch würde; andererseits weil die Temperatur eines derartigen Gemisches bei bestimmtem Druck bereits weitgehend festgelegt wäre, und damit die in den Untersuchungen angestrebten Variationen der Zustandsgrößen zwecks Ermittlung von Optimalverhältnissen von vornherein eingeengt. Außerdem

würde eine solche Betrachtung das Eingehen auf technologische Einzelheiten, insbesondere über den Mechanismus der Energieübertragung von der Energiequelle an das Arbeitsgas, unvermeidlich machen. Es ist jedoch nicht beabsichtigt, sich in dieser Hinsicht festzulegen, bevor die Ergebnisse der Grundlagenforschung einen hinreichend weiten Überblick gestatten.

Mit gleicher Begründung wird bei den folgenden Untersuchungen auch nur der wegen seiner hohen Wärmeübergänge technisch ungünstige Fall homogener Druck- und Temperaturverteilung berücksichtigt; man geht also zunächst weder auf spezielle Methoden künstlicher dynamischer Kühlung ein, noch kümmert man sich um Grenzschichtausbildung oder um die besonderen Gesetzmäßigkeiten räumlicher Strömung in der Düse. Andererseits werden die Abweichungen vom allgemeinen Energiegleichgewicht, deren Art und Ausmaß ebenfalls weitgehend durch den Mechanismus der Energieübertragung und die konstruktive Ausbildung der Rakete bestimmt sind, nicht völlig übergangen, sondern im Anschluß an die Berechnungen für verzögerungsfreie Gleichgewichtseinstellung wird die Einflußrichtung von Relaxationen einzelner Freiheitsgrade durch Betrachtung extremer hypothetischer Grenzfälle vorläufig ermittelt.

Dabei ist zu betonen, daß nicht nur die Annahme homogener Druck- und Temperaturverteilung aus bereits erwähnten Gründen einen ungünstigsten Fall darstellt, sondern auch die Vernachlässigung der Partikelmassen des zugemischten Energieträgers mit ihren sehr niedrigen Molgewichten zumindest den Betrag an gewinnbarer kinetischer Energie in der Düsenmündung herabsenkt.

II. Aufheizung von Wasserstoff bzw. Wasser bei konstantem Druck und unter Gleichgewichtsverhältnissen sowie erreichbare Mündungsgeschwindigkeiten in der Entspannungsdüse

Aus der Reihe der technisch als Arbeitsgase interessant erscheinenden Stoffe sollen zunächst Wasserstoff und Wasser ausführlicher betrachtet werden.

Unter Annahme idealen Gasverhaltens wurden beide Stoffe im Druckbereich zwischen 10^{+1} und 10^{-5} at und bei Temperaturen bis zu $10\,000^\circ$ K aufwärts untersucht. Bei der Berechnung der Konzentrationen im dissoziierenden und ionisierenden Arbeitsgas wurden die Komponenten H_2O_2 , O_3 , H_2O , O_2 , H_2 , OH , O , H , O^+ , H^+ und e^- berücksichtigt. Die Konzentration von O^- konnte nach grober Abschätzung vernachlässigt werden. Die Konzentrationen der ionisierten Moleküle O_2^+ , O_2^- , H_2^+ und OH^+ konnten ebenfalls vernachlässigt werden, weil erst bei Drucken oberhalb von 10^{+1} at die Ionisation spürbar vor Beendigung der Dissoziation einsetzt. Weitere Einzelheiten über die Berechnung, wie z. B. die benutzten Zustandssummen und sonstigen thermochemischen Unterlagen, sollen gesondert veröffentlicht werden [21].

Als Ergebnis dieser Berechnungen zeigt zunächst Abb. 1 Dissoziations- und Ionisationsgrade von Wasserstoff und Wasserdampf, in Abhängigkeit von Temperatur und Druck. Bei gleichem Druck und gleicher Temperatur hängen Dissoziations- und Ionisationsgrade unterschiedlicher Arbeitsgase bekanntlich von Zahl, Art und Atombilanz der berücksichtigten Komponenten, von den zwischen ihnen möglichen Gleichgewichtszyklen und von ihren molaren freien Enthalpien ab. Als Dissoziations-, bzw. als Ionisationsgrad ist in dieser Darstellung das Verhältnis der Summe der Partialdrucke aller Dissoziations-, bzw. aller Ionisationsprodukte zum jeweiligen Gesamtdruck bezeichnet, also:

$$D_{\text{H}_2} = (p_{\text{H}} + p_{\text{H}^+}) / (p - p_{e^-}) = \frac{1 - n_{\text{H}^+} - n_{\text{H}_2}}{1 - n_{\text{H}^+}}; \quad (2)$$

bzw.

$$D_{\text{H}_2\text{O}} = (p_{\text{H}_2} + p_{\text{H}} + p_{\text{H}^+} + p_{\text{OH}} + p_{\text{O}_2} + p_{\text{O}} + p_{\text{O}^+} + p_{\text{O}_3} + p_{\text{H}_2\text{O}_2}) / (p - p_{e-}) = \\ = (1 - n_{\text{H}^+} - n_{\text{O}^+} - n_{\text{H}_2\text{O}}) / (1 - n_{\text{H}^+} - n_{\text{O}^+}) \quad (3)$$

und (nach vollendeter Dissoziation)

$$J_{\text{H}_2} = (p_{\text{H}^+} + p_{e-}) / p = 1 - n_{\text{H}}; \\ \text{bzw.} \quad J_{\text{H}_2\text{O}} = (p_{\text{H}^+} + p_{\text{O}^+} + p_{e-}) / p = 1 - n_{\text{H}} - n_{\text{O}}. \quad (4)$$

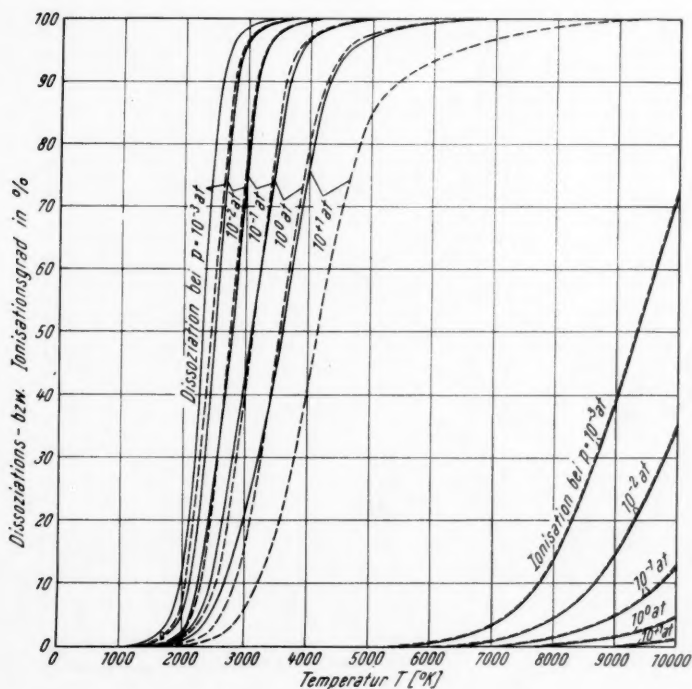


Abb. 1. Dissoziations- bzw. Ionisationsgrade der Arbeitsgase Wasser (—) und Wasserstoff (-----) in Abhängigkeit von Druck und Temperatur, sowie unter Voraussetzung vollständiger Gleichgewichtseinstellung

Nach dieser Definition ist der *Dissoziationsgrad* von H_2O , wie Abb. 1 erkennen läßt, zu Beginn der Dissoziation um ein Vielfaches höher als der von H_2 bei gleichen Zustandsgrößen, da die Dissoziation von H_2O in H_2 und O_2 bereits früher, das heißt bei niedrigeren Temperaturen oder höheren Drücken einsetzt als der Zerfall von H_2 in H . Mit zunehmenden Dissoziationsgraden nimmt dieser Unterschied allmählich ab, weil beide Werte naturgemäß gegen Eins konvergieren.

Der *Ionisationsgrad* von H_2O ist im betrachteten Zustandsbereich allenthalben um weniger als 1% niedriger als der von H_2 , weil die in Wasser neben Wasserstoff im Molverhältnis 1 : 2 vorhandenen Sauerstoffatome nur eine geringfügig höhere Ionisationsenergie als H aufweisen.

Abb. 2 gibt die mit Hilfe der errechneten Komponentenkonzentrationen gewonnenen Werte für die mittleren Molekulargewichte der beiden betrachteten Arbeitsgase, in Abhängigkeit von Druck und Temperatur, wieder. Außer den

absoluten Werten für die Molekulargewichte enthält die Zeichnung noch den Verlauf der Werte für die Wurzel aus dem Gewichtsverhältnis von Wasserdampf und Wasserstoff über Druck und Temperatur. Er ist für die Beurteilung der mit

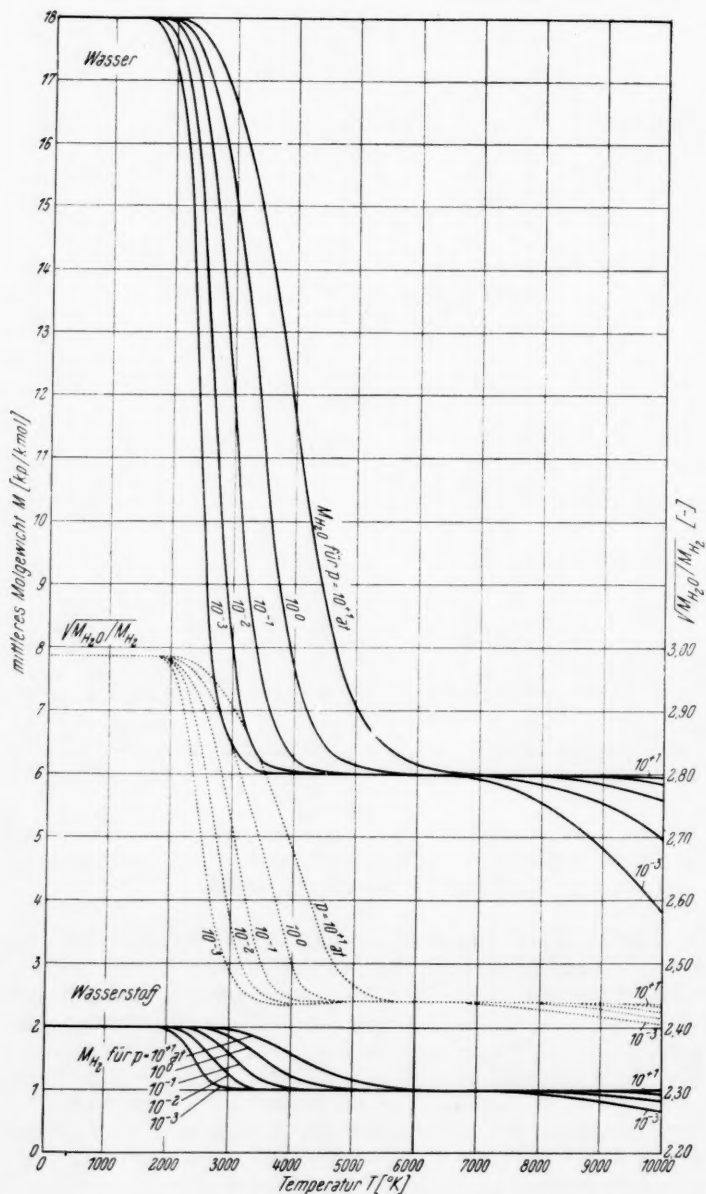


Abb. 2. Mittlere Molekulargewichte der Arbeitsgase Wasser und Wasserstoff im Gleichgewicht, sowie die Wurzel aus dem Gewichtsverhältnis dieser beiden Arbeitsgase, in Abhängigkeit von Temperatur und Druck

beiden Arbeitsgasen in Raketen erreichbaren Ausströmgeschwindigkeiten von Interesse. Im Falle völliger Dissoziation beider Arbeitsgase beträgt dieses Verhältnis $\sqrt{M_{\text{H}_2\text{O}}/M_{\text{H}_2}} = 2,441$, um bei niedrigen Temperaturen seinem Höchstwert von 2,989 zuzustreben, der bei völlig unterbundener Dissoziation erreicht wird.

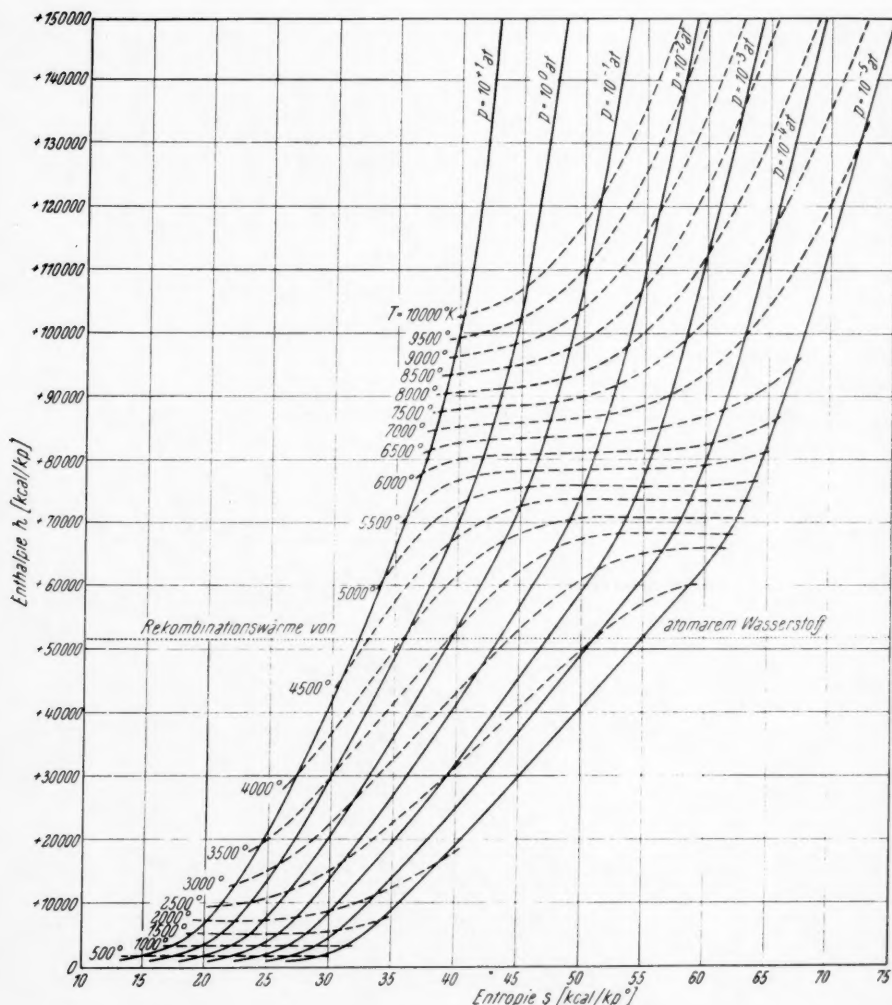


Abb. 3. Enthalpie-Entropie-Diagramm für Wasserstoff im Gleichgewicht

Wegen des aus Abb. 1 ersichtlichen Nachhinkens des Dissoziationsgrades von H_2 gegenüber dem von H_2O kann das Verhältnis $\sqrt{M_{\text{H}_2\text{O}}/M_{\text{H}_2}}$ in einem Zustandsbereich, wo nur H_2O soeben völlig dissoziiert ist, vorübergehend auch leicht den unteren Konvergenzwert von 2,441 unterschreiten, so lange, bis auch H_2 völlig dissoziiert ist. Das gleiche Spiel wiederholt sich im Bereich der einfachen Ionisation noch einmal, wobei der Konvergenzwert der gleiche wie nach erfolgter Dissoziation bleibt.

Die Abb. 3 und 4 enthalten Enthalpie-Entropie-Diagramme mit eingezeichneten Isobaren für die Drücke zwischen 10^{+1} und 10^{-5} at und Isothermen

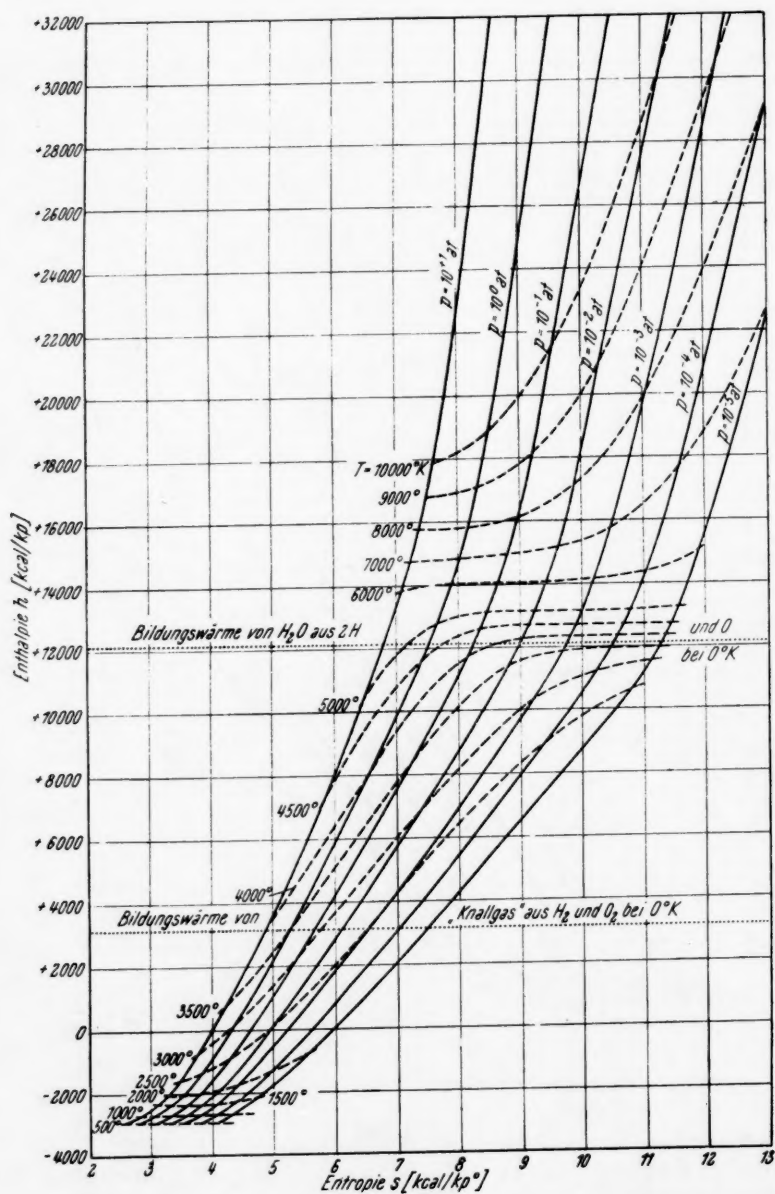


Abb. 4. Enthalpie-Entropie-Diagramm für Wasser im Gleichgewicht

für Temperaturen zwischen 500 und $10\,000^\circ\text{K}$. Das Enthalpie-Entropie-Diagramm, Abb. 3, das bereits vor einigen Jahren [18] erstmalig veröffentlicht

wurde und hier nur zu Vergleichszwecken wiederholt wird, gilt für Wasserstoff; Abb. 4 gilt für Wasserdampf. Um die oberen Grenzen zu veranschaulichen, die Raketen mit gekoppeltem Antriebssystem — im Fall von Wasserstoff oder Wasserdampf als Massenträger — hinsichtlich der erreichbaren Auspuffgeschwindigkeiten gesetzt sind, wurden in beiden Fällen ins Enthalpie-Entropie-Diagramm punktiert die konstanten Aufheizungsenthalpien eingezeichnet, die

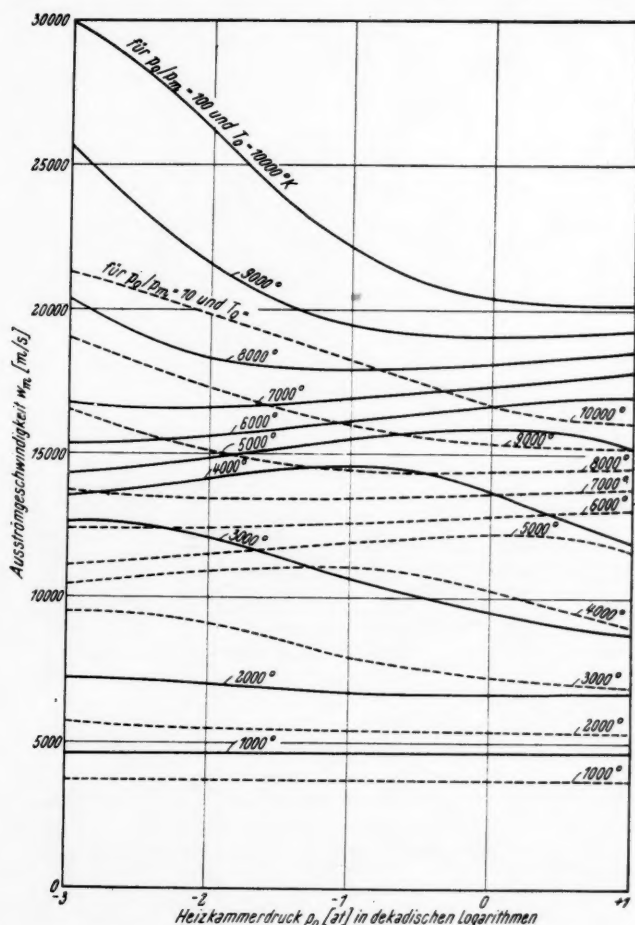


Abb. 5. Ausströmgeschwindigkeiten w_m von Wasserstoff aus der Feuergasdüse einer kernchemisch beheizten Rakete, in Abhängigkeit von Heizkammerdruck und -temperatur, p_0 und T_0 , sowie vom Entspannungsgefälle p_0/p_m in der Feuergasdüse, unter Voraussetzung verzögerungsfreier Gleichgewichtseinstellung

in der Brennkammer des Triebwerks durch eine — zur Bildung des betreffenden Massenträgers führende — chemische Reaktion möglichst hoher exothermer Wärmetönung erzielbar wären. In den beiden Beispielfällen sind dies:

die bei der Rekombination von einatomigem Wasserstoff zu H_2 und

die bei der Bildung von Wasserdampf aus H_2 und O_2 oder aus $2H$ und O freiwerdenden Wärmetönungen von 51 210, bzw. von 3170 oder 12 180 kcal/kp.

Die bei derart stoffgebundener, klassischer chemischer Aufheizung in der Feuergasdüse erreichbaren höchsten Mündungsgeschwindigkeiten zeigen den bekannten monotonen Anstieg mit zunehmenden Werten des Brennkammerdrucks. Sie betragen beispielsweise bei $p_0 = 10$ at und einem Entspannungsverhältnis von 100 : 1

$w_m = 14\,265$ m/s für Wasserstoffraketen und

$w_m = 4\,480$ m/s, bzw. $w_m = 6650$ m/s für Wasserdampfraketen dieser Art.

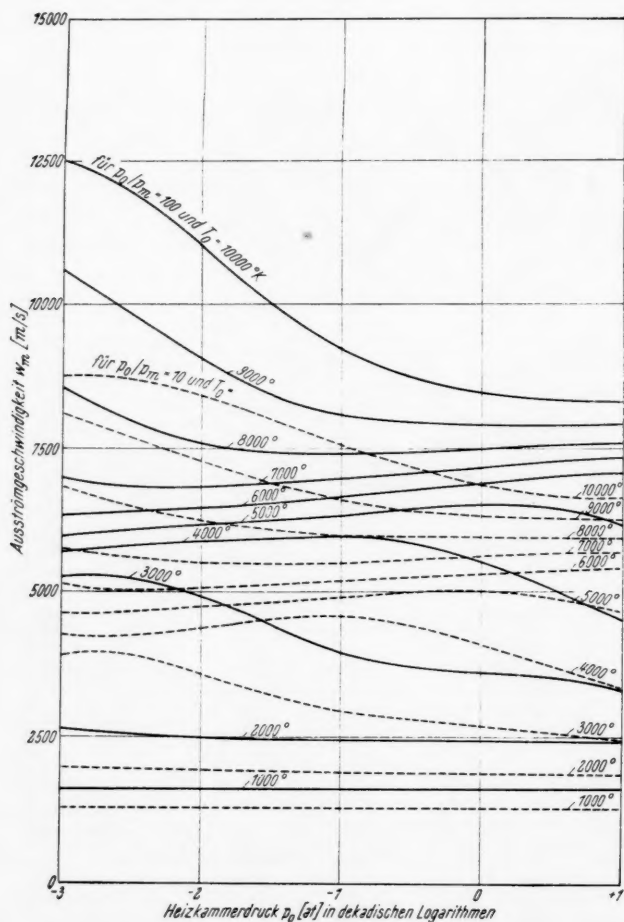


Abb. 6. Ausströmgeschwindigkeiten w_m von Wasserdampf aus der Feuergasdüse einer kernchemisch beheizten Rakete, in Abhängigkeit von Heizkammerdruck und -temperatur, p_0 und T_0 , sowie vom Entspannungsgefälle p_0/p_m in der Feuergasdüse, unter Voraussetzung verzögerungsfreier Gleichgewichtseinstellung

Das heißt, die Ausströmgeschwindigkeit der Wasserstoffrakete ist hier etwa 3,2 bis 2,1 mal so hoch wie die der anderen, je nachdem, ob man in dieser ein molekulares oder ein atomares stöchiometrisches Wasserstoff-Sauerstoff-Gemisch

zu Wasserdampf verbrennen läßt. Gleichzeitig dürften die Ausströmgeschwindigkeiten, die sich bei 100%iger Rekombination von einatomigem Wasserstoff in einer Rakete erzielen lassen, die höchsten sein, die mit Hilfe klassischer Atomschalen-Reaktionen überhaupt erreichbar sind. Dazu muß betont werden, daß solche Raketen wegen der Instabilität des atomaren Wasserstoffs bisher technisch nicht realisiert werden konnten. Die Auspuffgeschwindigkeiten heute üblicher Flüssigkeitsraketen, wie V2 und Viking, liegen bekanntlich zwischen 2000 und 2500 m/s.

Die Abb. 5 und 6 zeigen für Wasserstoff-, bzw. für Wasserdampftraketen mit *Fremd*-Aufheizung die Ausströmgeschwindigkeiten, die bei der Aufheizung auf bestimmte Temperaturen unter Gleichgewichtsverhältnissen und bei isentropischer Ausströmung mit einem Entspannungsgefälle $p_0/p_m = 10$, bzw. $p_0/p_m = 100$ in der Düsenmündung erreichbar werden, in Abhängigkeit vom Heizkammerdruck an. Der Verlauf der eingezeichneten Isothermen für ganze Tausender zwischen 1000 und 10 000° K läßt örtliche Maxima — mit allgemein ansteigender Tendenz in Richtung niedrigerer Heizkammerdrucke — erkennen. Bei 10^{-3} at Heizkammerdruck, einer Aufheizung auf 10 000° K und einem Entspannungsverhältnis von 100 : 1 liefert die Wasserstoffrakete mit $w_m = 29\,900$ m/s eine noch 2,40fach höhere Ausströmgeschwindigkeit als die Wasserdampfrakete. Ein allgemeinerer Vergleich beider Arbeitsgase an Hand der punktierten Kurve in Abb. 2 läßt erkennen, daß die Unterschiede in den — bei gleichen thermodynamischen Zustandsbedingungen — erreichbaren Ausströmgeschwindigkeiten im wesentlichen durch die verschiedenen mittleren Molekulargewichte der beiden Arbeitsgase bei ihrem Ausgangszustand in der Heizkammer bedingt sind.

Im Rahmen der Rechengenauigkeit bleibt das Verhältnis der Ausströmgeschwindigkeiten dieser beiden Arbeitsgase oberhalb von etwa 4000° K praktisch gleich der Wurzel aus dem reziproken Verhältnis der entsprechenden Molekulargewichte. Bei Temperaturen unterhalb von 4000° K, also im Bereich des steilen Gradienten der Dissoziation, bleibt das Verhältnis der Ausströmgeschwindigkeiten $w_{m_{H_2}}/w_{m_{H_2O}}$ etwas kleiner als das reziproke Verhältnis aus den Wurzeln der Molekulargewichte, und zwar um so mehr, je stärker — bei gleichem Ausgangsdruck in der Heizkammer — das Druckgefälle in der Düse ist. In diesem Temperaturbereich nimmt wegen der eher einsetzenden Dissoziation des Wassers also die Überlegenheit des Wasserstoffs hinsichtlich der Ausströmgeschwindigkeit bei gleichbleibendem Heizkammerdruck mit steigendem Entspannungsverhältnis in der Düse leicht ab. Um den Einfluß dieser sekundären Variablen, nämlich der molaren spezifischen Gemischwärmen $\sum_i n_i H_i/T$, auf die Auspuff-

geschwindigkeit etwas deutlicher aufzuzeigen, als dies beim Vergleich zwischen Wasserdampf und Wasserstoff mit ihren sehr ähnlich verlaufenden Dissoziations- und Ionisationsverhalten möglich war, zeigt Abb. 7 in analoger Auftragung wie bei den Abb. 5 und 6 die Ausströmgeschwindigkeiten, die mit Helium als Arbeitsgas bei Heizkammerzuständen im Druckbereich zwischen 10^{-3} und 10^{-1} at sowie im Temperaturbereich zwischen 1000° und 10 000° K erreichbar sind. Da Helium im ungünstigsten Grenzfall dieses Bereiches, bei 10 000° K und 10^{-3} at, erst einen Ionisationsgrad von rund $20/100$ aufweist, verhält es sich im ganzen betrachteten Zustandsbereich wie ein streng einatomiges Gas mit einer konstanten molaren spezifischen Wärme von $5/2 \cdot AR$, ergibt also Ausströmgeschwindigkeiten, die vom absoluten Ofendruck p_0 unabhängig sind. Ein Vergleich der Zahlenwerte für die Ausströmgeschwindigkeiten des Heliums (bei 10^{-3} at und 10 000° K in der Heizkammer werden nur $w_m = 9350$ m/s erreicht) mit den entsprechenden Werten des Wasserstoffs und des Wasserdampfes (29900 m/s, bzw. 12480 m/s)

läßt denn auch erkennen, daß Helium zwar *die* Stellung im Verhältnis zu Wasserstoff und Wasserdampf beibehält, die ihm nach seinem Molekulargewicht zukommt, — nämlich *zwischen* Wasserstoff und Wasser bei tiefen Temperaturen und *jenseits* von Wasserstoff und Wasser im hohen Temperaturbereich —, daß aber die genauen Werte der Ausströmgeschwindigkeiten überall ungünstiger sind, als sie es dem Verhältnis ihrer Molekulargewichte nach sein dürften. Dies hat seinen Grund darin, daß Helium — bei gleichen Ausgangswerten für Druck und Temperatur in der Heizkammer — dort die geringste molare spezifische Wärme, das heißt das niedrigste Enthalpiepotential, aufweist, und daß außerdem während der Entspannung in der Düse nur Translationsenergien, jedoch keinerlei Energien aus den Freiheitsgraden der Molekülrotation und -schwingung oder gar aus Rekombinationen von Dissoziation und Ionisation frei werden und der kinetischen Energie der Strömung zufließen.

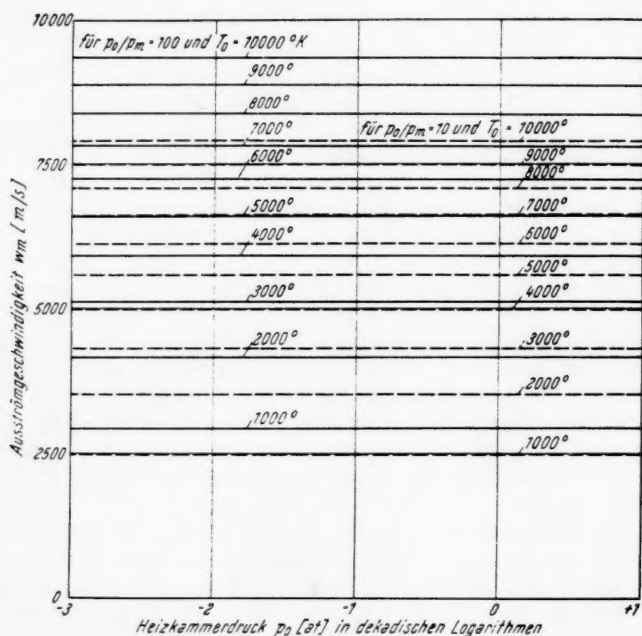


Abb. 7. Ausströmgeschwindigkeiten w_m von Helium aus der Feuergasdüse einer kernchemisch beheizten Rakete, in Abhängigkeit von Heizkammerdruck und -temperatur, p_0 und T_0 , sowie vom Entspannungsgefälle p_0/p_m in der Feuergasdüse, unter Voraussetzung verzögerungsfreier Gleichgewichtseinstellung

Trotzdem kann man ganz allgemein aussagen, daß für die Beurteilung der relativen Befähigung eines Arbeitsgases zur Erzeugung hoher Auspuffgeschwindigkeiten in Rückstoßtriebwerken das Verhältnis ihrer mittleren Molekulargewichte die überragende Rolle spielt, und zwar nicht so sehr das Verhältnis der Molekulargewichte im undissoziierten Normalzustand der Arbeitsgase vor der Aufheizung, das bisher meist in den Vordergrund gestellt wurde, als vielmehr das nach erfolgter Dissoziation oder Ionisation, bzw. das eines Zwischenzustandes für den Fall, daß die verglichenen Arbeitsgase in stark verschiedenen Zustandsbereichen ionisieren oder dissoziieren. Erst an zweiter Stelle, in weit

bescheidenerem Ausmaß, ist die molare Aufheizungsenthalpie, die zur Aufheizung auf eine bestimmte Temperatur oder einen bestimmten Zerfallsgrad aufgewendet werden muß, als Maß für die erreichbare Ausströmgeschwindigkeit wichtig.

III. Überschlägige Vergleichsbetrachtung weiterer möglicher Arbeitsgase, insbesondere von Wasserstoffverbindungen leichter Elemente

Unter diesen Gesichtspunkten sind in Tab. 1 die mittleren Molekulargewichte einiger, als Arbeitsgase unter Umständen in Frage kommender Verbindungen leichter Elemente zusammengestellt. Der besseren Vergleichbarkeit zuliebe wurden den absoluten Gewichtsangaben jeweils in Klammern die auf Wasserstoff bezogenen Relativwerte hinzugefügt. Außerdem enthält Tab. 1 die Verdampfungstemperaturen der aufgeführten Arbeitsgase bei 760 mm Druck in $^{\circ}\text{K}$, soweit sie bekannt waren.

Tabelle 1

Arbeitsgas	Verdampfungstemperatur bei 760 mm Hg $[^{\circ}\text{K}]$	mittleres Molekulargewicht M			
		im undissoziierten Zustand	nach völliger Dissoziation	nach einfacher Ionisation	nach zweifacher Ionisation
H_2	20,39	2,016 (1,000)	1,008 (1,000)	0,504 (1,000)	0,504 (1,000)
He	4,22	4,003 (1,986)	4,003 (3,971)	2,001 ₅ (3,971)	1,334 (2,647)
LiH	>953	7,948 (3,942)	3,974 (3,942)	1,987 (3,942)	1,590 (3,154)
BeH	?	10,021 (4,971)	5,011 (4,971)	2,505 (4,971)	2,004 (3,977)
B_2H_6	180,63	27,688 (13,734)	3,461 (3,434)	1,731 (3,434)	1,538 (3,052)
CH_4	111,67	16,042 (7,957)	3,208 (3,183)	1,604 (3,183)	1,458 (2,894)
NH_3	239,73	17,032 (8,448)	4,258 (4,224)	2,129 (4,224)	1,892 (3,755)
H_2O	373,16	18,016 (8,936)	6,005 (5,958)	3,003 (5,958)	2,574 (5,107)
HF	293,1	20,008 (9,925)	10,004 (9,925)	5,002 (9,925)	4,002 (7,940)

Diese Zahlen haben allerdings nur einen echten Vergleichswert, wenn die in der Überschrift gekennzeichneten verschiedenen Energiezustände näherungsweise in *gleichen* thermodynamischen Zustandsbereich für alle Vergleichsgase eintreten. — Außerdem müßten sie schon bei solchen Temperaturen und Drucken erreicht werden, die kältetechnisch noch beherrscht werden können. Dies gilt insbesondere hinsichtlich der bei zunehmender Ionisation immer stärker auftretenden kontinuierlichen Rekombinationsstrahlung. In Tab. 2 werden deshalb noch die bei der Normtemperatur von 25°C in kcal/kmol aufzuwendenden Reaktionswärmen [10] für die völlige Dissoziation der verglichenen Arbeitsgase, sowie für die einfache und zweifache Ionisation ihrer atomaren Komponenten zusammengestellt, da man in allererster Näherung annehmen kann, daß ein endothermer Zerfallsprozeß bei um so höheren Temperaturen einsetzt und endet, je höher seine Reaktionsenthalpie ist.

Einen wirklichen Anhalt über die Reihenfolge der Beendigung der einzelnen Zerfallsprozesse auf der Temperaturskala geben aber diese Werte nur unter Einschränkungen; nämlich nur dann, wenn ein Zerfallsprozeß *weder* stufenweise erfolgt — wie bei den meisten Dissoziationen von mehr als zweiatomigen Molekülen — *noch*, wenn verschiedene Zerfallsprozesse gleichzeitig stattfinden, wie bei der

Ionisation der verschiedenen Zerfallsprodukte eines Moleküls. Es bleiben dann eigentlich nur Wasserstoff und Helium als auf Antrieb vergleichbare Gase auf dieser Liste übrig; bei den übrigen Stoffen könnte nur eine genaue Rechnung Klarheit verschaffen, wieweit die niedrigen mittleren Molekulargewichte der Dissoziations- und Ionisationsprodukte in der Rakete für die Auspuffgeschwindigkeit tatsächlich nutzbar gemacht werden können und in welchen thermodynamischen Zustandsbereichen sie wirksam werden.

Tabelle 2

Reaktion	Reaktionswärme E_0 [kcal/kmol]	Reaktion	Reaktionswärme E_0 [kcal/kmol]	Reaktion	Reaktionswärme E_0 [kcal/kmol]
$H_2 \rightarrow 2 H$	104 178	$H \rightarrow H^+$	314 999	—	—
—	—	$He \rightarrow He^+$	568 340	$He \rightarrow He^{++}$	1 824 440
$LiH_{Gas} \rightarrow Li_{Gas} + H$	58 459	$Li \rightarrow Li^+$	125 790	$Li \rightarrow Li^{++}$	1 871 130
$BeH_{Gas} \rightarrow Be_{Gas} + H$	50 619	$Be \rightarrow Be^+$	216 419	$Be \rightarrow Be^{++}$	637 763
$B_2H_6 \rightarrow 2 B_{Gas} + 6 H$	358 167	$B \rightarrow B^+$	192 800	$B \rightarrow B^{++}$	774 260
$CH_4 \rightarrow C_{Gas} + 4 H$	397 943	$C \rightarrow C^+$	259 950	$C \rightarrow C^{++}$	823 583
$NH_3 \rightarrow N + 3 H$	252 872	$N \rightarrow N^+$	336 913	$N \rightarrow N^{++}$	1 021 145
$H_2O \rightarrow O + 2 H$	221 135	$O \rightarrow O^+$	315 500	$O \rightarrow O^{++}$	1 127 465
$HF \rightarrow F + H$	134 589	$F \rightarrow F^+$	403 250	$F \rightarrow F^{++}$	1 211 380

Unabhängig von der Temperatur und dem Druck, bei dem der jeweilige Zerfallsprozeß beendet ist, lassen sich aus Tab. 1 und 2 Werte in kcal/kp (Zerfallsprodukt) für die globalen Reaktionswärmen vom Grundzustand bis zum angegebenen Zerfallsgrad jeden Prozesses ableiten. Aus ihnen können bekanntlich — unter Vernachlässigung der Differenz der thermischen Enthalpien von Anfangs- und Endprodukten der Reaktion und unter Annahme völligen Umsatzes der im dissoziierten oder ionisierten Arbeitsgas vorhandenen potentiellen chemischen Energie in kinetische — die sogenannten „theoretischen“ Auspuffgeschwindigkeiten, w_{th} , bestimmt werden. Diese Reaktionswärmen sind nebst den entsprechenden Geschwindigkeitswerten in Tab. 3 zusammengestellt.

Tabelle 3

Arbeitsgas	Globale Reaktionswärmen in kcal/kp und theoretische Auspuffgeschwindigkeiten in m/s		
	nach beendeter Dissoziation	nach beendeter einfacher Ionisation	nach beendeter Zweifachionisation
H_2	$e_0 = 103\ 351$ $w_{th} = (29\ 400)$	1 456 698 (110 000)	— (—)
He	— (—)	283 957 (48 700)	1 367 646 (107 000)
LiH	14 710 (11 100)	251 257 (45 800)	1 411 691 (108 700)
BeH	10 102 (9 200)	232 350 (44 100)	500 689 (64 700)
B_2H_6	103 487 (29 400)	1 521 526 (112 800)	2 468 583 (143 800)
CH_4	124 047 (32 200)	1 195 691 (100 000)	1 702 000 (119 400)
NH_3	59 387 (22 300)	720 893 (77 600)	1 172 840 (99 100)
H_2O	36 825 (17 500)	388 489 (57 000)	768 686 (80 200)
HF	13 453 (10 600)	170 499 (37 800)	415 034 (58 900)

Alle drei Tabellen bestätigen hinsichtlich erreichbarer Auspuffgeschwindigkeit die unstreitige Überlegenheit des Wasserstoffs gegenüber allen anderen Arbeitsgasen in allen Zustandsbereichen. Außerdem dürfte Wasserstoff am frühesten von allen Gasen völlig ionisiert und damit (wenn man von der jenseits von 10^7 °K einsetzenden Kernstrahlung absieht) frei von Strahlung oberhalb einer verhältnismäßig niedrigen Temperatur werden. — Diese liegt z. B. bei Feuergasdrucken von 10^{-3} at bereits in der Gegend von $20\,000^0$ K und selbst bei 10 at Druck immerhin noch bei $50\,000^0$ K. Eben wegen der starken Rekombinationsstrahlung im ganzen Ionisierungsbereich haben die Angaben in den zweiten und dritten Spalten der Tabellen bei Arbeitsgasen mit mehr als zwei Elektronen in den Atomschalen wahrscheinlich nur akademischen Wert.

Zusammenfassend läßt sich sagen: günstig als Arbeitsgase sind möglichst vielatomige Verbindungen leichter Elemente mit möglichst hohem Wasserstoffgehalt und möglichst hohen molaren Zerfallswärmen. Unter Voraussetzung, daß die für den Zerfall erforderlichen hohen Aufheizungsenthalpien unbegrenzt und genügend „billig“ lieferbar sind, ermöglichen solche Gase nämlich die höchstmöglichen Ausströmgeschwindigkeiten aus der Rakete, weil ihre Feuergasenthalpien pro Masseneinheit, h_0 , in der Heizkammer — infolge der hohen molaren Enthalpiewerte und der geringen mittleren Molgewichte im dissoziierten Zustand — möglichst hoch sind, und andererseits die Enthalpie h_m in der Düsenmündung bei niedrigeren Temperaturen und entsprechend verminderter Dissoziation — infolge der dadurch freigewordenen hohen Dissoziationswärmen und den gleichzeitig viel höher gewordenen mittleren Molgewichten — möglichst niedrig sind, so daß die Differenz beider Enthalpien ($h_0 - h_m$), die in kinetische Energie des Feuergasstrahls umwandelbar ist, entsprechend groß wird.

Wasser nimmt — mit einem mittleren Molekulargewicht vom 9- bis 5-fachen von dem des Wasserstoffs in allen Aufhebungsbereichen — unter den möglichen Arbeitsgasen einen verhältnismäßig ungünstigen Platz ein, der infolge der starken Feuergasstrahlung des Wasserdampfs in allen Temperaturbereichen auch hinsichtlich seiner Wärmeübergänge an die Feuergaswände nicht vorteilhafter werden dürfte. Bor(III)-Wasserstoff und Methan könnten dagegen in bestimmten thermodynamischen Zustandsbereichen den Qualitäten des Wasserstoffs ziemlich nahekommen, weshalb eine genaue Berechnung der Enthalpie-Entropie-Diagramme dieser beiden Stoffe sich lohnen möchte.

Zuletzt soll nicht unerwähnt bleiben, daß bei bestimmten Methoden der Feuergasaufheizung, bei denen das kalte Arbeitsgas unmittelbar durch Beschuß hochenergetischer Elementarteilchen erwärmt wird, das mittlere Molekulargewicht M_F des Feuergases durch die Zumischung solcher Teilchen unter Umständen beeinflußt werden kann. Eine Zusammenstellung derartiger Partikel, ihrer Symbolbezeichnungen und Molekulargewichte bringt Tab. 4. Mit Ausnahme des Neutrons enthält sie nur stabile Teilchen mit einer von Null verschiedenen Ruhemasse.

Tabelle 4

α -Teilchen	$\alpha \equiv {}^4_2\text{He}$	$M_E = 4,002\,76$
β -Teilchen	$\beta \equiv e^- \text{ oder } e^+$	$M_E = 0,000\,54_9$
Deuteronen	$d \equiv {}^2_1\text{H}$	$M_E = 2,014\,19$
Neutronen	$n \equiv {}^1_0\text{n}$	$M_E = 1,008\,98$
Protonen	$p \equiv {}^1_1\text{H}$	$M_E = 1,007\,59$
Tritonen	$t \equiv {}^3_1\text{H}$	$M_E = 3,025\,56$

Aus der Definitionsgleichung

$$M_F = \frac{n_E M_E + n_A M_A}{n_E + n_A}$$

und der eingangs dieser Arbeit erwähnten Beziehung (1) läßt sich der Zusammenhang zwischen dem mittleren Molekulargewicht M_F des Feuergases — nach der Zumischung der leichten Partikel mit dem Molekulargewicht M_E — und dem mittleren Molekulargewicht M_A des aufgeheizten Arbeitsgases allein, durch die Gleichung

$$M_F = M_A \cdot \frac{1}{1 + (M_A/M_E - 1) h_0/h_E} \quad (5)$$

darstellen. Wie diese Formel zeigt, ist es zur Erlangung eines möglichst niedrigen Wertes für M_F günstig, die Aufheizung auf eine gewünschte Ofenenthalpie h_0 durch den Beschuß möglichst vieler und möglichst leichter Partikel mit einer nur wenig über h_0 liegenden Energie zu erzeugen. Eine zahlenmäßige Überschlagsrechnung läßt erkennen, daß der Beschuß mit Neutronen, Protonen, Deuteronen, Tritonen oder α -Teilchen aus kernchemischen Aufbaureaktionen das mittlere Molekulargewicht des Arbeitsgases kaum beeinflußt, wegen der bei dem hohen Energieverhältnis h_E/h_0 nur geringen pro Mol Arbeitsgas notwendigen Teilchenzahl n_E . Der Beschuß von beispielsweise Wasserstoffgas mit α -Teilchen könnte sogar grundsätzlich zu einer leichten Erhöhung des mittleren Molekulargewichtes nach der Mischung führen. Anders liegt der Fall beim Beschuß schwerer Arbeitsgase mit verhältnismäßig langsamen Elektronen. Mit $M_A = 10$, $M_E = 5,5 \cdot 10^{-4}$ und $h_0/h_E = 10^{-3}$ erhält man z. B.: $M_F \approx M_A/19,2$, eine Absenkung des mittleren Molekulargewichtes auf rund den zwanzigsten Teil seines Wertes vor der Zumischung und damit nach den bisherigen Erfahrungen mehr als vierfach erhöhte Ausströmgeschwindigkeiten.

IV. Wärmeübergänge von Wasserstoff, Wasser und Helium an die Feuergaswände unter Gleichgewichtsverhältnissen

Wie bereits eingangs dieser Betrachtung erwähnt wurde, besteht das Problem der thermischen Atomrakete nicht nur in der Erreichung möglichst hoher Ausströmgeschwindigkeiten aus der Feuergasdüse, sondern vor allem darin, daß die dabei auftretenden hohen Wärmeübergänge vom Feuergas an die Innenwände der Strömungsbehälter kühlungsmäßig beherrscht werden müssen. Es sollen deshalb die hier behandelten Arbeitsgase unter den bisher betrachteten thermodynamischen Zustandsbedingungen hinsichtlich der dabei auftretenden Wärmeübergänge untersucht werden. Für Vergleichszwecke genügt es in diesem Zusammenhang, die Vorgänge nur in der Heizkammer bei vernachlässigbar geringer Strömungsgeschwindigkeit zu betrachten. Bekanntlich erfolgt jede Wärmeübertragung auf zwei verschiedenen Wegen, die beide völlig verschiedenen Gesetzmäßigkeiten unterliegen und daher gesondert behandelt werden müssen, nämlich: durch Konvektion und durch Strahlung.

Über die Ableitung des Konvektionsproduktes als Maß für konvektiven Wärmeübergang wurde bereits in einer früheren Arbeit [18] berichtet. Hier soll nur zusammenfassend wiederholt werden, daß das sogenannte „Konvektionsprodukt“ ($\gamma \bar{w} h$) sich aus der molekularen Enthalpie ($\gamma h/N$) der einzelnen Gaspartikel und der Häufigkeit ($N \cdot \bar{w}$) ihres Aufpralls auf die Behälterwand zusammensetzt, also tatsächlich ein Maß für die in der Zeiteinheit an die Wandoberfläche transportierte Energie bildet. Von den genannten Symbolen bedeuten γ das spezifische Gewicht des Feuergases, h seine Enthalpie pro kg, \bar{w} die

mittlere Translationsgeschwindigkeit der Gasmoleküle und N ihre Zahl pro Volumeinheit. Wenn in der Heizkammer kein homogenes Gas, sondern ein reagierendes Gemisch vorliegt, muß also sinngemäß das Konvektionsprodukt zunächst für jede einzelne Gaskomponente berechnet und danach die Summe

$$(\gamma \bar{w} h) = \sum_i (\gamma_i \bar{w}_i h_i) = \sqrt{8 p^2 / (\pi R T)} \cdot \sum_i [n_i H_i / \sqrt{M_i}] \quad (6)$$

aller transportierten Teilenergien gebildet werden und nicht etwa das Produkt $\sum_i \gamma_i \sum_i \bar{w}_i \sum_i h_i$ aus den Summen der partiellen Werte für γ , \bar{w} und h .

Dabei bleiben zunächst die Fragen offen, ob sämtliche an die Wand aufprallenden Partikel ihre gesamte thermische und chemische Enthalpie auch unverzüglich der Wand mitteilen, ob sie in Wandnähe überhaupt noch ihre volle Enthalpie aus dem Feuergasraum bewahrt haben und welche oder wieviele Partikel prozentual bei verschiedenen Rekombinationsmöglichkeiten eine *bestimmte* Rekombination mit der für sie charakteristischen, freiwerdenden chemischen Enthalpie an der Wand eingehen. Würde man über die Gesetzmäßigkeiten dieses gaskinetischen Mechanismus, der vielleicht mit Hilfe von Molekularstrahlen experimentell untersucht werden könnte, bereits Näheres kennen, so wäre man nicht nur in der Lage, genaue absolute Werte für die konvektiven Wärmeübergänge anzugeben, sondern unter Umständen auch diese Wärmeübergänge zu steuern, indem man beispielsweise die Behälterwände für Rekombinationen mit hohen freiwerdenden Reaktionswärmen durch Antikatalysatoren vergiftete, wie man dies beispielsweise bereits im Falle der Rekombination von atomarem Wasserstoff durch Beladen der Wand mit H_2O oder O_2 -Gas oder mit syrupsäurer Phosphorsäure [7] versucht hat.

Für die Berechnung des Konvektionsproduktes, das ja nur ein Parameter mit purem Vergleichswert zu sein beansprucht, wurden zunächst — ebenso wie bei der Berechnung der Ausströmgeschwindigkeiten — verzögerungsfreier und völliger Energieaustausch der Gaspartikel mit der Wandoberfläche und völliger homogene Energieverteilung im Feuergasraum einschließlich der Grenzschicht vereinfachend angenommen. Darüber hinaus besteht folgende Modellvorstellung: Die Feuergaswand soll eine gegenüber dem Feuergas verschwindend geringe Eigenenthalpie haben, so daß unter Gleichgewichtsverhältnissen jede auftreffende Partikel ihre gesamte thermische Enthalpie unverzüglich an die Wand abgibt. Die auftreffenden Gaspartikel sollen sich außerdem so lange in der Wandoberfläche aufhalten, bis sie durch genügend zahlreiche Zusammenstöße mit anderen in der Wand weilenden Feuergasparkeln — bei jeweils völliger Abgabe der freiwerdenden Reaktionsenergie an die Wand — zu den Verbindungen mit dem relativ niedrigsten chemischen Potential umgeformt werden, also im Fall von Wasserstoff zu H_2 , im Fall von Wasserdampf zu H_2O , im Fall von Kohlenwasserstoff-Sauerstoff-Gemischen zu H_2O und CO_2 usw. Dissoziationen beim Aufprall sehr schneller Teilchen auf die Wand und der durch sie bedingte Verzehr von kinetischer Energie der Gasteilchen sollen vernachlässigt werden, so daß schließlich gleichmäßig für alle Arbeitsgase der ungünstigste, nämlich der höchste überhaupt mögliche, Wert für den Wärmetransport an die Wand als Vergleichsbasis gewählt wird.

Unter diesen Voraussetzungen entstand Abb. 8, wo das Konvektionsprodukt für Wasserstoff, Wasser und Helium in logarithmischer Darstellung, in Abhängigkeit von verschiedenen Feuergasdrucken und Temperaturen, aufgetragen wurde. Um ein Gefühl für die praktische Bedeutung der dort wiedergegebenen Zahlenwerte zu vermitteln, wurde gleichzeitig auf dieser Abbildung das zu

$2,5 \cdot 10^7$ kcal/m²s berechnete Konvektionsprodukt für eine gewöhnliche Gasöl-Sauerstoffrakete eingetragen, die vor mehr als 15 Jahren am Trauener Prüfstand

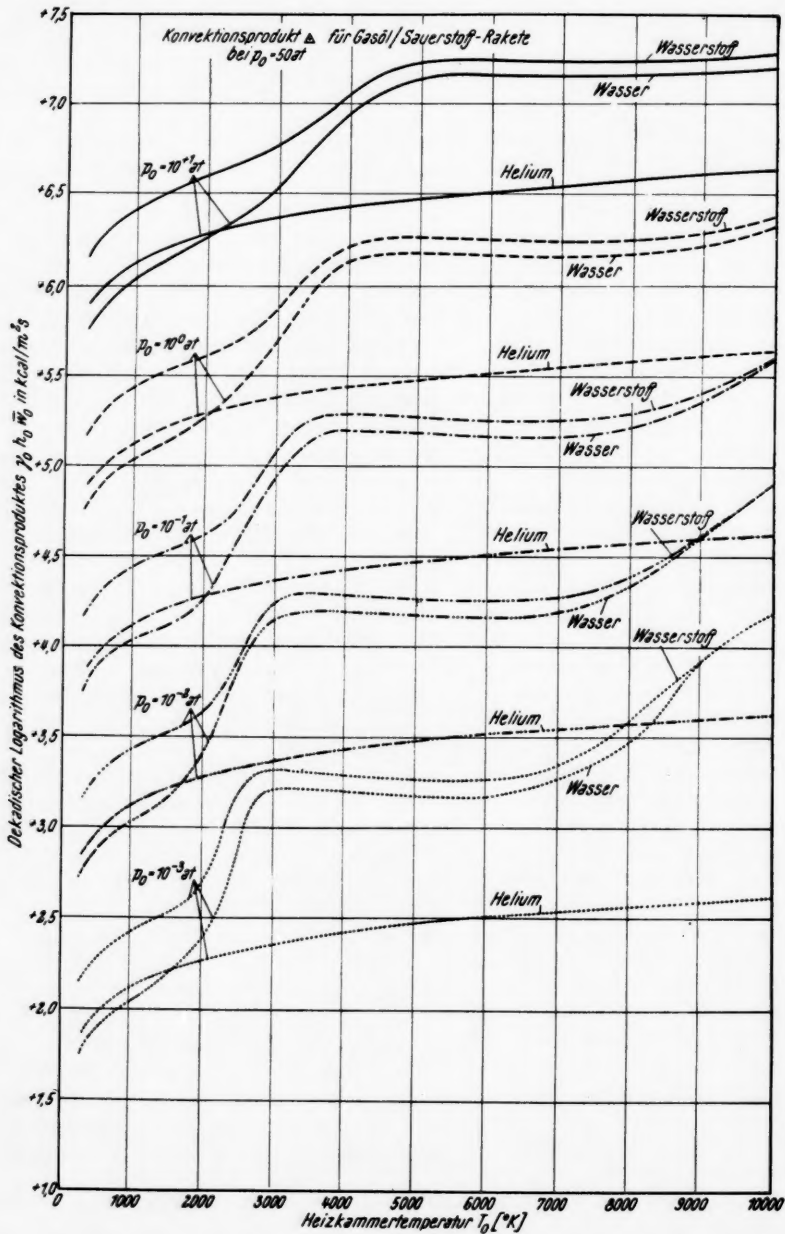


Abb. 8. Vergleichende Darstellung des konvektiven Wärmeübergangs in der Heizkammer einer Rakete für die Arbeitsgase Wasserstoff, Wasser und Helium unter Gleichgewichtsverhältnissen und in Abhängigkeit von Temperatur und Druck

Vol.
3
1957

erprobt wurde und deren konvektive und strahlende Wärmeübergänge bei 50 at Feuergasdruck und 3550 °K Feuergastemperatur mittels Zwangslauf-Wasserkühlung schon damals stationär sicher beherrschbar waren. Die Konvektionsprodukte von Wasserstoff, Wasser und Helium liegen im betrachteten Zustandsbereich, das heißt bei Drucken bis zu 10 at und bei Temperaturen bis zu 10 000° K aufwärts, alle niedriger als dieser Wert.

Im übrigen zeigt Abb. 8 vor allem den überragenden Einfluß des absoluten Feuergasdruckes auf das Konvektionsprodukt. Diese lineare Abhängigkeit des Konvektionsproduktes vom Druck bewirkt, daß bei gleich großem, konvektivem Wärmeübergang *alle* Arbeitsgase mit fallendem Druck immer höhere Ausströmgeschwindigkeiten ermöglichen, da die Ausströmgeschwindigkeiten ihrerseits vom Druck entweder völlig unabhängig sind oder — bei indirekter Druckabhängigkeit über die molaren spezifischen Wärmen — mit fallendem Druck sogar höher werden. Bei homogenen, nicht dissoziierenden Gasen mit konstanten spezifischen Wärmen verhalten sich — *bei gleich großem Konvektionsprodukt* in der Brennkammer — die erreichbaren Ausströmgeschwindigkeiten wie

$$(w_m)_1/(w_m)_2 = \frac{(p_0)_2}{(p_0)_1} \sqrt{\frac{(C_p)_2 [1 - (p_m/p_0)^{AR/(C_p)_1}]}{(C_p)_1 [1 - (p_m/p_0)^{AR/(C_p)_2}]}} \quad (7)$$

worin $(C_p)_i$ die molaren spezifischen Wärmen der beiden Vergleichsgase und p_0/p_m das in beiden Fällen gleich große Druckgefälle in der Feuergasdüse bedeuten. Ein solches Arbeitsgas ermöglicht hiernach bei konstanten konvektiven Wärmeübergängen an die Heizkammerwände um so höhere Ausströmgeschwindigkeiten, je niedriger sein Heizkammerdruck und je *geringer* seine molaren spezifischen Wärmen sind, unabhängig von Temperatur und Molekulargewicht. Die Voraussetzung konstanter spezifischer Wärmen gilt indes bei den meisten Gasen nur bei verhältnismäßig hohen Drucken und bei so niedrigen Temperaturen, daß die Absolutwerte, die dabei für die Ausströmgeschwindigkeit im besten Fall erreichbar werden, uninteressant sind. Die nach dieser Betrachtungsweise am günstigsten liegenden *einatomigen* Gase, für welche die obigen Voraussetzungen sogar bis zum Bereich der beginnenden Ionisierung zutreffen, ermöglichen Ausströmgeschwindigkeiten von mehr als 10 000 m/s erst oberhalb von 10 000° K, wo einerseits die entsprechenden Konvektionsprodukte schon mehr als 10⁷ kcal/m²s betragen und andererseits wegen beginnender Ionisierung die Voraussetzungen der Homogenität des Gases und der konstanten spezifischen Wärmen nicht mehr zutreffen, sowie neben den konvektiven Wärmeübergängen solche durch Strahlung hinzukommen, die nicht mehr dem Konvektionsprodukt, sondern Funktionen der Temperatur proportional sind. Vergleicht man verschiedene Arbeitsgase nicht bei gleichen Konvektionsprodukten, sondern *bei gleichen Drucken und Temperaturen* miteinander, so sieht man leicht ein, daß die Ausströmgeschwindigkeiten näherungsweise dem Ausdruck $\sqrt{\sum_i n_i H_i} / \sqrt{\sum_i n_i M_i}$ verhältig verlaufen, die Konvektionsprodukte hingegen dem Ausdruck $\sum_i [n_i H_i / \sqrt{M_i}]$.

Beide Größen wachsen also mit *steigenden* spezifischen Wärmen und mit fallenden Molekulargewichten, jedoch in etwas verschieden starkem Maße. Man kann allgemein sagen, daß der Vorzug eines Arbeitsgases vor einem anderen weniger in einer höheren Ausströmgeschwindigkeit bei gleich hohen konvektiven Wärmeübergängen begründet ist, als vielmehr darin, daß bestimmte hohe Ausströmgeschwindigkeiten nur von diesem bestimmten Gas und von keinem anderen in einigermaßen strahlungsfreien Zustandsbereichen überhaupt erreicht werden können, wobei entsprechend höhere konvektive Wärmeübergänge in Kauf ge-

nommen werden müssen, die unter den hier gültigen Voraussetzungen allein durch Absenkung der Feuergasdrucke erträglich gemacht werden können.

Im einzelnen lehrt Abb. 8, daß im niedrigen Temperaturbereich unterhalb von etwa 2000° K, wo nur erst der geringe thermische Anteil der molaren spezifischen Wärmen zur Auswirkung kommt, die Konvektionsprodukte und die Ausströmgeschwindigkeiten bei gleicher Temperatur und gleichem Druck fast gleichmäßig mit fallendem mittlerem Molekulargewicht (das heißt in der Reihenfolge H_2O , He, H_2) ansteigen, wo also gemäß der obigen Ableitung für homogene Gase mit konstanten spezifischen Wärmen Helium von allen drei Vergleichsgasen die relativ günstigste — aber, absolut gesehen, bescheidene — Ausströmgeschwindigkeit, auf gleich großen konvektiven Wärmeübergang bezogen, liefert. Bei höheren Temperaturen, bei denen die molaren spezifischen Wärmen von Wasserstoff und Wasser im Gegensatz zu denen des Heliums infolge aufzuwendender Dissoziationswärmen stark anschwellen, bleiben die Wärmeübergänge von Helium mit weiter zunehmender Temperatur gegenüber denen von Wasser und Wasserstoff immer mehr zurück. Die Ausströmgeschwindigkeiten von Helium werden jedoch erst oberhalb von 7000° K schlechter als die des Wassers, so daß zwischen 2000° und 7000° K Helium bei geringeren Wärmeübergängen größere Ausströmgeschwindigkeiten verspricht als Wasser. Wasserstoff steht in diesem ganzen Bereich sowohl hinsichtlich seiner Wärmeübergänge als auch seiner Ausströmgeschwindigkeiten mit Abstand an der Spitze. Mit noch weiter steigenden Temperaturen und abnehmenden Drucken, also im Bereich merkbar werdender Ionisation, nähern sich die Kurven für die Konvektionsprodukte von Wasser und Wasserstoff einander immer mehr, bis sie von dem Augenblick an, wo das Konvektionsprodukt überwiegend durch den Anteil $n_e \cdot H_e / \sqrt{M_e}$ der freien Elektronen im Arbeitsgas bestimmt ist, der ja bei beiden Stoffen bei gleichen Temperaturen und Drucken durchwegs fast gleich groß ist, praktisch einander gleich verlaufen. Dies ist bei einem Ionisationsgrad von mehr als 35% der Fall. In diesen extremen Bereichen ist also Wasserstoff — bei gleichen Temperaturen und Drucken — sogar bei gleich großen konvektiven Wärmeübergängen um ein durch das Verhältnis der mittleren Molekulargewichte überwiegend bestimmtes Vielfaches besser als Wasser hinsichtlich seiner Ausströmgeschwindigkeit. Helium läßt sich hier nicht unmittelbar mit den beiden anderen Arbeitsgasen vergleichen, weil es einen entsprechenden Ionisationsgrad erst bei wesentlich höheren Temperaturen oder niedrigeren Drucken als Wasser und Wasserstoff erreicht. Bei gleichen Drucken und Temperaturen wie diese beiden Arbeitsgase sind das Konvektionsprodukt des Heliums im betrachteten Zustandsbereich um eine Größenordnung, seine Ausströmgeschwindigkeit bis zu etwa 2/3 kleiner als die entsprechenden Werte dieser beiden Vergleichsgase.

Für die Wärmeübergänge durch Strahlung wurde in einer früheren, nur den Wasserstoff betreffenden Untersuchung [18] die Temperatur als Vergleichsmaßstab eingeführt. Dieser Parameter genügt nicht mehr, wenn außer verschiedenen thermodynamischen Zustandsbereichen auch verschiedene Arbeitsgase miteinander verglichen werden sollen, da dann der Faktor, mit dem die Ausstrahlung einer Potenz der Temperatur verhältig ist, und auch diese Potenz selbst, keinesfalls mehr als gleichbleibend betrachtet werden dürfen. In der vorliegenden Untersuchung soll daher die spezifische Ausstrahlung $R = R_0 (1 - e^{-d\sigma}) \approx R_0 d\sigma$ als Maß für den Wärmeübergang durch Strahlung dienen. In dieser Beziehung bedeuten R_0 die spezifische Ausstrahlung eines schwarzen Strahlers nach dem Gesetz von STEFAN-BOLTZMANN, d die Dicke der strahlenden Schicht (die im vorliegenden Falle praktisch dem mittleren Heizkammerdurchmesser gleich-

gesetzt werden kann); $n = p/kT$ steht für die Zahl der Gaspartikel pro Volumeneinheit und σ für den mittleren optischen Wirkungsquerschnitt. Die Temperatur der bestrahlten Wandfläche wurde bei dieser Betrachtungsweise als vernachlässigbar gering angenommen.

Bei Berechnung der spezifischen Ausstrahlung von Arbeitsgasen muß man grundsätzlich zweierlei Art der Strahlung im Gleichgewicht unterscheiden:

1. die diskontinuierliche Strahlung diskreter, stoffspezifischer Wellenlängen (Linien oder Banden), die durch gequantelte Anregungszustände bedingt ist, und
2. die kontinuierliche Rekombinationsstrahlung jenseits der Bandenköpfe, die bei der Rekombination von Ionen und Elektronen oder von dissoziierten Molekülen mit kontinuierlichem Geschwindigkeitsspektrum entsteht.

Für die Energiezustände eines Arbeitsgases, oberhalb derer diskontinuierliche Strahlung berücksichtigt werden muß, ist die sogenannte Resonanzlinie charakteristisch, die beim Übergang eines Elektrons aus dem niedrigst möglichen Anregungszustand in den Grundzustand ausgesandt wird, oder die dieser Resonanzlinie λ zugeordnete charakteristische Temperatur $\Theta_{el} = hc/(k\lambda) \doteq 1,44 \cdot 10^{-8}/\lambda$.

Für die Energiezustände, bei denen Rekombinationsstrahlung ausgesandt wird, sind die molekularen Reaktionswärmen ε_0 dieser Rekombinationen charakteristisch oder die ihnen zugeordneten charakteristischen Temperaturen $\Theta_{ion} = \varepsilon/k$.

Tabelle 5

Elemente	Resonanzlinie (ÅE)	Charakteristische Temperatur für die unterste Anregungsstufe (°K)	Charakteristische Temperatur für die einfache Ionisation (°K)	Temperatur (°K) bei 99,9%iger Ionisierung unter 10^{-3} at Druck
H	1 215,68	118 100	158 500	15 100
He	584,4	245 700	280 006	24 400
Li	6 707,85	21 400	63 300	7 300
Be	2 348,61	61 100	108 900	11 100
B	1 818,41	79 000	97 000	10 200
C	1 261,57	113 800	130 800	12 900
N	1 200,68	119 600	169 500	15 900
O	1 358,66	105 700	158 800	15 100
F	7 800,22	18 400	202 900	18 400

In Tab. 5 sind für eine Reihe von leichten Elementen die Zahlenwerte für die Resonanzlinien, die charakteristischen Elektronenanregungstemperaturen und die entsprechend höheren charakteristischen Temperaturen für einfache Ionisation zusammengestellt. Da die charakteristischen Temperaturen nur als reine Rechengrößen mit der Dimension einer Temperatur gedacht werden dürfen, wurden der besseren Anschaulichkeit zuliebe in einer weiteren Spalte als Beispiel die wirklichen Temperaturen bezeichnet, bei denen unter 10^{-3} at Druck der Ionisierungsvorgang für das erste Schalenelektron zu 99,9% beendet ist. Die Berechnung hierfür erfolgte überschlägig mit Hilfe der SAHA-Gleichung.

Während die diskontinuierliche Strahlung bei einer Anzahl von Arbeitsgasen vernachlässigbar gering sein kann, kommt der kontinuierlichen Rekombinationsstrahlung mit steigender Ladungszahl der Atome steigende Bedeutung zu, wenn auch in einem Temperaturbereich, der meist oberhalb der hier gewählten Grenze von $10\,000^\circ$ K liegt.

Als Zahlenbeispiel wurde nach einem von E. SÄNGER entwickelten Verfahren [15] die spezifische Ausstrahlung von Wasserstoff im Bereich der Ionisation für verschiedene Feuergasdrücke und für eine Heizkammer von 1 m Durchmesser berechnet und in Abb. 9 über der Feuergastemperatur aufgetragen. Gleichzeitig

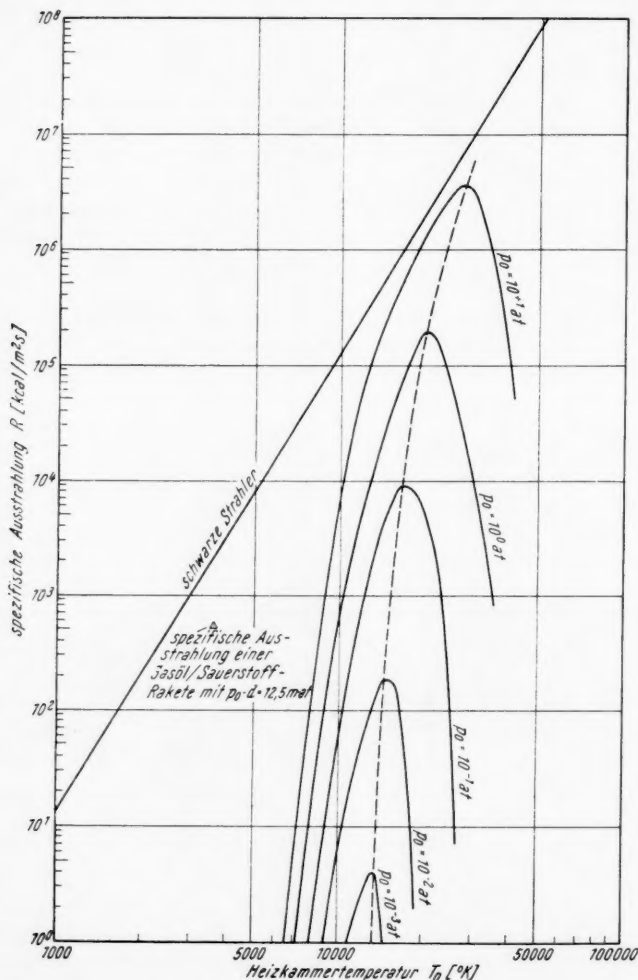


Abb. 9. Spezifische Ausstrahlung von Wasserstoffgas im Gleichgewicht, in Abhängigkeit von Temperatur und Druck in der Heizkammer, bei einem Heizkammerdurchmesser von $d = 100$ cm

wurden als Bezugswerte die durch den schwarzen Strahler vorgegebene höchstmögliche Ausstrahlung und die spezifische Ausstrahlung der bereits erwähnten und kühlttechnisch gut beherrschten Gasöl-Sauerstoff-Rakete in die Zeichnung vermerkt. Man erkennt, daß bei dem gewählten Brennkammerdurchmesser die Ausstrahlung bei etwa 9000° K und 1 at Heizkammerdruck kritisch zu werden beginnt. Bei niedrigeren Heizkammerdrücken, wie sie auch für die Beherrschung

der konvektiven Wärmeübergänge günstig sind, könnten dagegen ohne weiteres selbst bei $10\,000^{\circ}\text{K}$ entsprechend größere Heizkammerquerschnitte kühlungs-mäßig beherrscht werden.

Wegen fehlender Unterlagen über die mittleren optischen Wirkungsquerschnitte von reinem Helium und Wasserdampf konnte eine analoge Darstellung für diese beiden Arbeitsgase bisher leider nicht wiedergegeben werden. Nach den Zahlenwerten in Tab. 5 dürfte jedoch Helium im diskontinuierlichen wie im kontinuierlichen Bereich bei den hier untersuchten Drucken und unterhalb von $10\,000^{\circ}\text{K}$ nur vernachlässigbar wenig strahlen. Wasserdampf hingegen dürfte, wie E. SÄNGER bereits in einer früheren Arbeit [12] ausführlicher darstellte, bereits im diskontinuierlichen Strahlungsbereich erhebliche Wärmeübergänge verursachen. Nach seiner Berechnung strahlt Wasserdampf bei optisch unendlich großer Schichtdicke bereits bei 2000°K mit einer Energie von 41 % des schwarzen Strahlers, das heißt mit etwa $89\text{ kcal/m}^2\text{s}$.

Unter Berücksichtigung der verhältnismäßig niedrigen Ausströmgeschwindigkeiten bei höheren Gesamtwärmeübergängen scheint also Wasserdampf vom rein thermodynamischen Standpunkt aus und unter Zugrundelegung von Gleichgewichtsverhältnissen gegenüber Wasserstoff merkbar ungünstiger. Helium könnte innerhalb eines schmalen Temperaturbereiches knapp oberhalb von $10\,000^{\circ}\text{K}$ bei beginnender Ionisation interessant werden.

V. Der Einfluß von Nichtgleichgewichtsvorgängen auf die Werte von Ausströmgeschwindigkeit und Wärmeübergang, sowie auf die Bewertung der verschiedenen Arbeitsgase

Die bisherigen Untersuchungsergebnisse wurden alle unter Voraussetzung verzögerungsfreier und vollständiger Einstellung des Energiegleichgewichtes erhalten. Dabei ist es in Wahrheit aber durchaus nicht sicher,

1. ob die Art der Energieübertragung eine völlige Gleichgewichtseinstellung im Arbeitsgas während seines Aufenthaltes in der Heizkammer gestattet;

2. ob die Form der Feuergasdüse darüber hinaus eine verzögerungsfreie Anpassung aller Energiefreiheitsgrade an die während der Entspannung veränderlichen thermodynamischen Zustandsbedingungen in jedem Düsenquerschnitt ermöglicht, und endlich,

3. ob die wandnahen Feuergasmoleküle noch gleich hohe Energien wie die Moleküle im Feuergaskern besitzen und ob sie diese Energien durch Strahlung und Konvektion völlig an die Feuergaswände abgeben.

Erwünscht wären vom technischen Zweck der Triebwerke aus gesehen:

1. wegen der dabei auftretenden — auf gleiche Feuergastemperatur bezogen — höchsten Mündungsgeschwindigkeiten, *Energiegleichgewicht in der Heizkammer* [3], sowie

2. anschließend *isentropische Entspannung* in der Düse [2, 16] und

3. ein möglichst *steiles Energiegefälle vom Feuergaskern zur Wand* hin, bei möglichst *elastischer Reflexion* der Feuergasmoleküle an der Wand [13].

Die vorausgegangenen Berechnungen unter Gleichgewichtsvoraussetzung stellen also hinsichtlich der erreichbaren Mündungsgeschwindigkeiten den günstigsten, hinsichtlich der konvektiven Wärmeübergänge den *ungünstigsten* Fall dar, wenn man den Vergleich bei konstanten und durch die Translationsenergie des Feuergases definierten *Heizkammertemperaturen* durchführt. Für einen Vergleich der erreichbaren Mündungsgeschwindigkeiten bei konstanter Heizkammer-*enthalpie*, wie er im Fall eines chemisch gekoppelten Antriebssystems sinngemäß wäre, trifft die Vorrangstellung des völligen Energiegleichgewichtes in Heiz-

kammer und Düsenströmung hinsichtlich der erreichbaren Ausströmgeschwindigkeit keinesfalls allgemein zu [3]. Ein solcher Vergleich wäre im vorliegenden Fall ungekoppelter Antriebssysteme auch ziemlich uninteressant, da hier ja eine praktisch unbegrenzt leistungsfähige Energiequelle vorausgesetzt werden soll, und die bei hohen Temperaturen in erster Linie bedeutungsvollen Wärmeübergänge durch Strahlung nur Funktionen der Elektronenanregungs- und der Rekombinations-temperaturen und nicht der Gesamtenthalpie sind.

Da die Berechnungen unter Annahme vollständigen Energieaustausches an den Grenzflächen für den *konvektiven Wärmeübergang* bereits die höchst möglichen Werte ergeben, das heißt den ungünstigsten Fall darstellen, soll der Einfluß von Verzögerungen oder Unterbindung des Energieaustausches hier nicht zahlenmäßig untersucht, sondern nur die bisher bekannten Mittel aufgezählt werden, die diesen Wärmeübergang bei gleichbleibend hohen Heizkammerenthalpien erniedrigen könnten. Dies kann einmal durch Erzeugung künstlicher Temperaturgefälle vom Kern der Heizkammer zur Wand hin mittels flüssiger [8] oder gasförmiger [5] Kühlschleier, durch örtliche Begrenzung eines heißen Plasmakerns — fern den festen Wänden —, beispielsweise mit Hilfe von Magnetfeldern [1], usw., also durch jegliche künstliche Erniedrigung des unter Gleichgewichtsverhältnissen an die Heizkammerwände gelangenden Enthalpiebruchteils, geschehen; zum anderen aber auch durch Erhöhung des Anteils elastischer Reflexion der Feuer-gasmoleküle an den Wänden, entweder mittels chemischer antikatalytisch wirkender Wandüberzüge, oder mittels Beeinflussung der Wandoberflächenstruktur oder durch elektrostatische Aufladung der Wände usw. Unter den aufgezählten Mitteln haben Kühlschleier nicht nur den Vorteil, daß sie den konvektiven Wärmeübergang erniedrigen, sondern sie schwächen auch gleichzeitig die zur Wand hingehende Strahlung. Schließlich sind hier noch die klassischen und für sich allein nicht mehr ausreichenden Methoden der Wandkühlung zu erwähnen, welche die vom Feuergas an die Wand bereits abgegebene Wärme durch die Wand hindurch an gasförmige oder flüssige Kühlmittelströme ableiten.

Was die *Wärmeübergänge durch Strahlung* anbelangt, die man in Analogie zu den konvektiven Wärmeübergängen materieller Partikel grundsätzlich auch als konvektive Wärmeübergänge von Photonen bezeichnen könnte, so läßt sich keine eindeutige Voraussage hinsichtlich der Auswirkung von Nichtgleichgewichtsvorgängen treffen. Einerseits dürfte bei gleichen Translationstemperaturen in der Heizkammer wahrscheinlich volle Gleichgewichtseinstellung im Arbeitsgas die niedrigsten Wärmeübergänge ergeben, da die Vor-Gleichgewichtsperiode, wie noch später erläutert werden soll, sich fast stets durch eine Überbesetzung der Freiheitsgrade für Elektronenanregung und der Ionisation auszeichnet. Andererseits wird derartige, immer nur örtlich, in eng begrenzten Räumen der Heizkammer, auftretende Chemolumineszenzstrahlung fast immer durch die umgebenden Gashüllen stark geschwächt und ihr Intensitätsmaximum nach größeren Wellenlängen zu verschoben, bevor sie die festen Heizkammerwände erreicht.

Um die Zusammenhänge zwischen dem Grad der Gleichgewichtseinstellung und der *erreichbaren Mündungsgeschwindigkeit* an Beispielfällen zahlenmäßig zu veranschaulichen, wurden in Abb. 10 und 11 für Wasserstoff, bzw. für Wasser, in Abhängigkeit von der durch die Translationsenergie definierten Heizkammer-temperatur und für bestimmte Strömungsbedingungen — nämlich für 1 at Heizkammerdruck und ein Spannungsverhältnis von 100 : 1 — die Heizkammer-enthalpie h_0 und die durch die Enthalpiedifferenzen ($h_0 - h_m$) des Gases zwischen Heizkammer und Düsenmündung festgelegten, gewinnbaren kinetischen Energien $w_m^2/2$ g für vier hypothetische Fälle von Gleichgewichts-anpassung vergleichsweise eingezeichnet.

Fall I bedeutet hier: verzögerungsfreie Gleichgewichtseinstellung innerhalb der Translationsfreiheitsgrade in Heizkammer und Feuergasdüse; völliges Einfrieren aller übrigen Freiheitsgrade in dem Zustand, in dem sie sich vor der Aufheizung, beispielsweise bei Zimmertemperatur, in der Heizkammer befanden.

Fall II bedeutet: verzögerungsfreie Gleichgewichtseinstellung bei Translationen und Rotationen; völliges Einfrieren aller übrigen Freiheitsgrade.

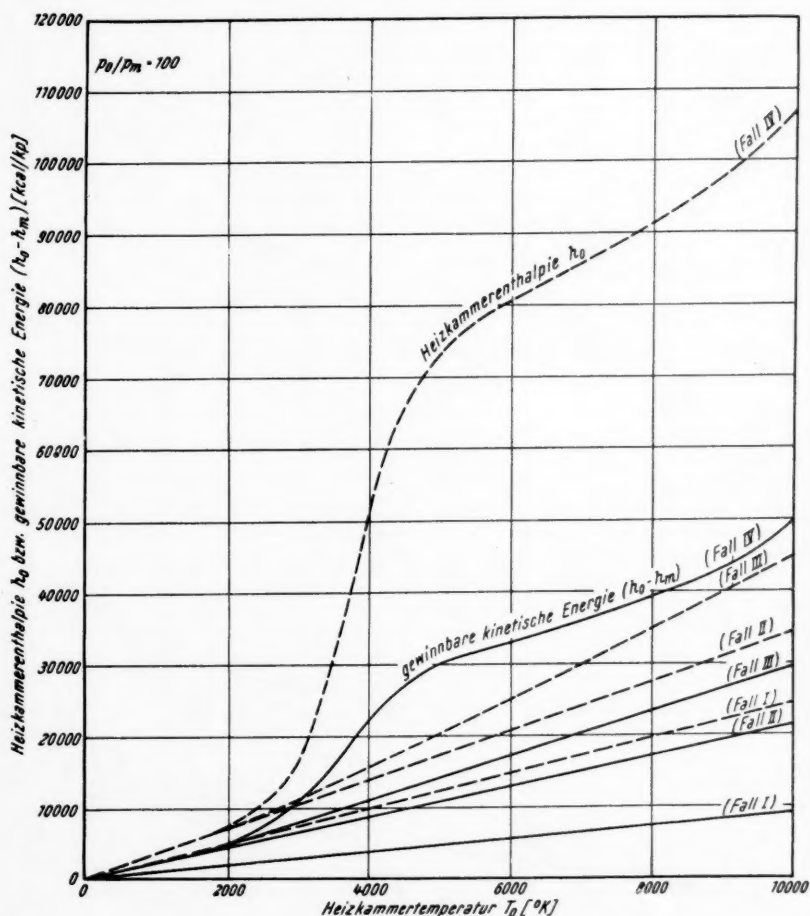


Abb. 10. Aufheizungsenthalpien h_0 von Wasserstoff und die daraus in der Feuergasdüse bei einer Entspannung von 1 at auf 0,01 at gewinnbaren kinetischen Energien $(h_0 - h_m)$, in Abhängigkeit von der Heizkammertemperatur T_0 und vom Grad der Einstellung des Gleichgewichtes in den verschiedenen Energiefreiheitsgraden während Aufheizung und Entspannung (Fälle I bis IV)

Fall III meint verzögerungsfreie Gleichgewichtseinstellung der Translationen und aller inneren Freiheitsgrade; völliges Einfrieren der Dissoziations- und Ionisationsgrade.

Unter Fall IV endlich soll verzögerungsfreie Gleichgewichtseinstellung aller Freiheitsgrade, einschließlich der chemischen Reaktionen, in Heizkammer und Düse verstanden werden.

In den Fällen I bis III ist das Verhalten der Strömung nur von der Temperatur im Kessel und vom Druckgefälle in der Feuergasdüse abhängig; in Fall IV darüber hinaus noch vom absoluten Druck in der Heizkammer. Bei der Berechnung des chemischen Anteils der Enthalpien in Fall IV wurde bei der Betrachtung von Wasserstoff als Arbeitsgas (Abb. 10) die Bildungswärme von H_2 bei $0^\circ K$ gleich

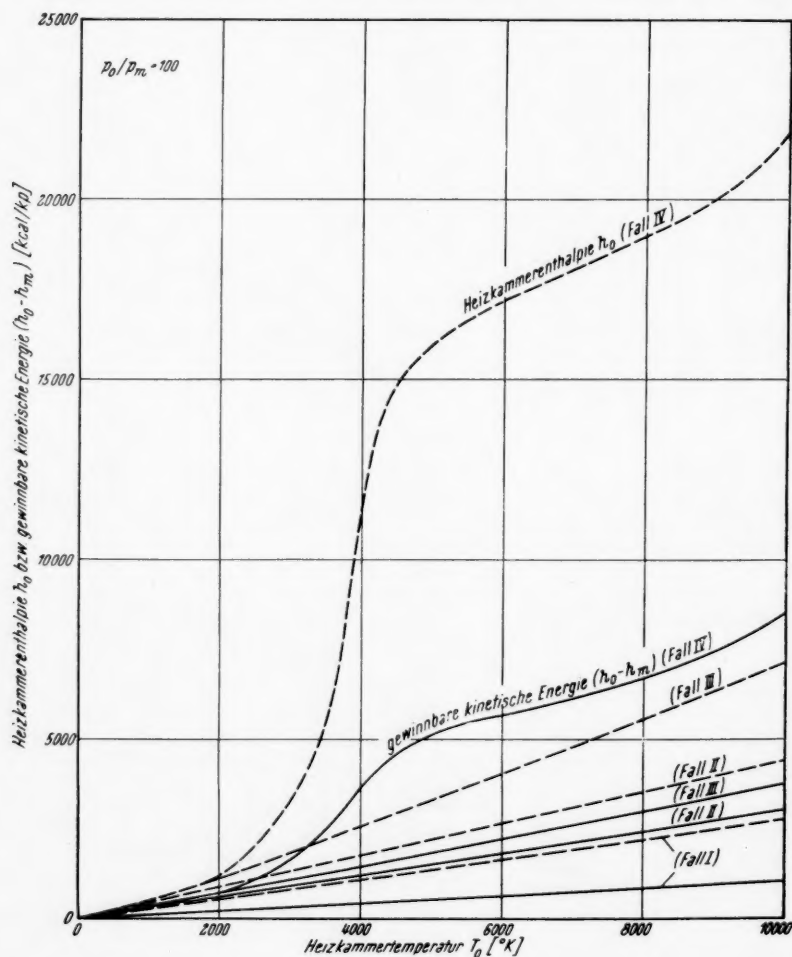


Abb. 11. Aufheizenthalpien h_0 von Wasserdampf und die daraus in der Feuergasdüse bei einer Entspannung von 1 at auf 0,01 at gewinnbaren kinetischen Energien $(h_0 - h_m)$, in Abhängigkeit von der Heizkammertemperatur T_0 und vom Grad der Einstellung des Gleichgewichtes in den verschiedenen Energiefreiheitsgraden während Aufheizung und Entspannung (Fälle I bis IV)

Null gesetzt; bei der Betrachtung von Wasserdampf (Abb. 11) wurde sinngemäß die Bildungswärme gasförmigen Wassers als Basiswert benutzt.

Wie zu erwarten war, wird die Heizkammerenthalpie h_0 bei gleichbleibender Heizkammertemperatur um so höher, je mehr die verschiedenen Energiefreiheitsgrade der Moleküle sich — dieser Temperatur entsprechend — absättigen konnten,

also mit zunehmender Annäherung an den Zustand völligen Gleichgewichtes, von Fall I bis Fall IV ansteigend. Dasselbe gilt für die Enthalpiedifferenz ($h_0 - h_m$), die ja um so höher wird, je höher einerseits das Energiepotential h_0 im Kesselzustand ist und je vollständiger sich andererseits das Feuergas in der Düse durch Dämpfung aller seiner Energiefreiheitsgrade und Entbindung von thermochemischer Energie den erniedrigten Drucken und Temperaturen anpaßt. Im Fall I unterscheiden sich die auf Masseneinheit bezogenen Enthalpien und Enthalpiedifferenzen der verschiedenen Arbeitsgase dabei streng nur entsprechend dem umgekehrten Verhältnis von deren Molekulargewichten. In den Fällen II, III und IV geht dieser Unterschied zwischen Wasser und Wasserstoff in steigendem Maße von II nach IV, jedoch insgesamt nur leicht, zurück infolge der höheren spezifischen Wärmen und der höheren Dissoziation von Wasser.

Wenn der Anpassungsgrad an das Gleichgewicht nicht — wie in den vorhin behandelten Fällen I bis IV — in Heizkammer und Düse gleich ist, sondern verschieden stark wäre, sich in der *Heizkammer* also beispielsweise nur Translationen und Rotationen ohne Zeitverzug anregen ließen und alle anderen Freiheitsgrade völlig einfrieren, während in der *Düse*

a) sich nur die Translationsenergien den sinkenden Drucken und Temperaturen unverzüglich anpaßten, bei Einfrieren aller übrigen Freiheitsgrade in dem Zustand, den sie in der Heizkammer aufwiesen, oder

b) sich nicht nur Translationen und Rotationen, sondern auch die Molekülschwingungen verzugsfreier Gleichgewichtseinstellung bedienten, so erhielte man beidemale geringere Werte für die gewinnbare kinetische Energie ($h_0 - h_m$) als im Fall II. Im Fall IIa würde nämlich der Rotationsanteil der spezifischen Wärmen zwischen T_0 und T_m für die Umsetzung in kinetische Energie ungenutzt bleiben, im Fall IIb würde der Schwingungsanteil der spezifischen Wärme zwischen der niedrigen Temperatur vor der Aufheizung des Kessels und der Düsenmündungstemperatur T_m für die kinetische Energie verloren gehen, wobei eine genaue Rechnung noch dadurch kompliziert wird, daß bei gleicher Heizkammertemperatur T_0 und gleichem Druckgefälle p_0/p_m wegen der verschiedenen Quasi- κ -Werte während der Entspannung die Mündungstemperatur T_m in allen drei Fällen verschieden hoch ist, und zwar am höchsten im Fall II [2, 16, 20].

Nach diesen sehr schematischen Betrachtungen über den Einfluß von Verzögerungen bei der Einstellung des allgemeinen Energiegleichgewichtes, bzw. bei Einfrieren einzelner Freiheitsgrade auf die mit einem bestimmten Arbeitsgas und einer bestimmten Kesseltemperatur dieses Gases erreichbaren Ausströmgeschwindigkeiten, sei ein Überblick angestrebt, wieweit und in welcher Form man bei der Aufheizung eines Arbeitsgases wirklich mit Abweichungen vom Energiegleichgewicht rechnen muß. Nach den bisherigen Erkenntnissen kann man drei grundsätzlich verschiedene Aufheizungsverfahren für ein Arbeitsgas in Erwägung ziehen, die sich unter anderem durch den Temperaturbereich unterscheiden, für den der Energieträger geliefert werden kann.

1. Wo eine Zufuhr thermischer Energie zwischen 10^2 und 10^3 °K zur Aufheizung des Arbeitsgases ausreicht, denkt man an die Verwendung von *Spaltungsreaktoren* bereits erprobter Bauart [22]. Weil dabei dem Arbeitsgas die notwendige Energie mittels Wärmeaustauscher zugeführt wird, ist erstens die Aufheizungstemperatur durch die zulässigen Temperaturen der festen Reaktorbestandteile nach oben zu begrenzt und zweitens die Masse des dem Arbeitsgas beigemischten Energieträgers gleich Null; das heißt das Massenverhältnis zwischen Energieträger und Arbeitsgas in Kessel und Entspannungsdüse wird $K = 0$. Außerdem dürfte bei dieser Art der Aufheizung in der Heizkammer völliges Energiegleichgewicht herrschen und — wegen der niedrigen Aufheizungsstem-

peraturen und geringen Strömungsgeschwindigkeiten — wahrscheinlich auch in der Düse. Die Methode wird voraussichtlich für Hochleistungs-Flugtriebwerke nicht angewendet werden, weil die Triebwerksgewichte einschließlich Reaktor, Schutzmantel, Pump- und Einspritzaggregat dabei unverhältnismäßig hoch werden und die bei Raketen beispielsweise auf diesem Wege erreichbaren Ausströmungsgeschwindigkeiten so gering bleiben, daß sich keine Vorteile gegenüber Systemen mit gekoppeltem Antriebssystem, wie thermischen Flüssigkeitsraketen abzeichnen.

2. Wo Energieträger mit Temperaturen zwischen etwa $5 \cdot 10^3$ und $5 \cdot 10^4$ °K ausreichen, kann ein Arbeitsgas mittels *Lichtbogen* aufgeheizt werden. Hier geschieht das Aufheizen des Arbeitsgases also auch nicht unmittelbar durch kernchemische Energie, sondern durch ein elektrisches Potential, das seinerseits allerdings mit Hilfe kernchemischer Energie aufgebaut sein kann, wie dies beispielsweise bei Verwendung von β -Zerfallsbatterien nach einem Vorschlag von KAEPPELER [6, 17] der Fall sein würde.

Eine ungekoppelte Rakete mit Wasser als Arbeitsgas und Energiezufuhr aus dem Lichtbogen, also mit Glühelatronen als Energieträger wurde 1954 erstmalig von PETERS im Laboratoriumsmaßstab realisiert [9]. Bei seinen Versuchen bildete ein spiralenförmig durch ein Rohrinnes strömender Wasserstrahl einen Wirbelkanal von wenigen Millimeter Durchmesser, in dessen Achse der Lichtbogen brannte. Durch die Stromleistung des Bogens wird der umgebende Wassermantel teilweise verdampft und kann bis zu Plasmatemperaturen von über 50000 °K in der Bogenachse aufgeheizt werden. Das infolge der verdampften Wassermenge unter Überdruck stehende Plasma strömt durch die als LAVAL-Düse ausgebildete Anode mit einer dem Spannungsgefälle und der Bogenaufheizung entsprechenden Mündungsgeschwindigkeit ins Freie. Das Wasser dient bei dieser Anordnung also gleichzeitig als Stabilisator des Lichtbogens, als Kühlmantel und als Arbeitsgas. Das Temperaturgefälle von der Bogenachse bis zum Rand des Bogens ist außerordentlich stark und beträgt größenordnungsmäßig bis zu $4 \cdot 10^4$ °/mm. Wegen der allmählichen Aufheizung des Arbeitsgases aus dem flüssigen Zustand herrscht im Plasma innerhalb der Heizkammer weitgehend Energiegleichgewicht. Wieweit in der Entspannungsdüse Relaxationen eine Rolle spielen, wurde meines Wissens bisher nicht untersucht. Eine weitere Eigenart dieser Versuchsanordnung ist die Tatsache, daß die elektrische Leistung des Bogens, die bei vorgegebenem Wirbelkanal zunächst die Bogen temperatur bestimmt, damit auch die Menge des pro Zeiteinheit verdampfenden Wassers festlegt und folglich auch den Plasma druck in der Heizkammer, so daß von den drei maßgeblichen Betriebsvariablen: Heizkammertemperatur, Heizkammerdruck und Massendurchsatz der Rakete, immer nur eine frei gewählt werden kann. Die Lichtbogenrakete nach PETERS stellt sicherlich nicht die einzige mögliche Lösung der Arbeitsgasaufheizung durch Lichtbögen dar. Man könnte daran denken, die Wechselwirkung zwischen Plasmen und ihren eigenen oder fremden Magnetfeldern dazu auszunutzen, die heißen Plasmen fern von Wänden im Kern der Heizkammer zu lokalisieren. Ferner brauchten Lichtbogenkanal und Heizkammer nicht unbedingt identisch zu sein. Nach GRÜN, SCHOPPER und SCHUMACHER [4] können Gasraum und Erzeugungssystem eines Korpuskularstrahlbündels durch „dynamische Druckstufen“ miteinander verbunden werden, die es erlauben, im Vakuum erzeugte, beschleunigte und optisch gebündelte Korpuskularstrahlen durch freie Öffnungen von mehreren Millimetern Durchmesser in einen unter Atmosphärendruck stehenden Gasraum einzuschleusen. Dieses Verfahren würde Kombinationen von beliebigen, elektrisch geladenen Energieträgern mit beliebigen Arbeitsgasen gestatten, wenn die von der Firma Heraeus betriebene technische Weiterent-

wicklung des Druckstufenverfahrens zu befriedigenden Resultaten führt oder inzwischen führte. Als Korpuskularstrahlenerzeuger können außer stationären Lichtbögen bei einer solchen Anordnung auch Glimmentladungen, Kathodenstrahlröhren, Elektronenschleudern oder sogenannte „Plasmapistolen“ [1] usw. verwendet werden.

Bei diesen Verfahren ist in der Heizkammer mit einer mehr oder weniger großen Abweichung vom allgemeinen Energiegleichgewicht zu rechnen, die sich erfahrungsgemäß durch eine Überbesetzung von Elektronenanregung und Ionisation äußert. Grundsätzlich ist das Heizkammergas um so weiter vom Energiegleichgewicht entfernt; je weniger gaskinetische Stöße zwischen Energieträger und Arbeitsgas während ihres gemeinsamen Aufenthaltes in der Heizkammer stattfinden können und je höher die Energiedifferenz zwischen Energieträger und Arbeitsgas ist.

3. Dementsprechend weit entfernt vom Energiegleichgewicht dürften Gasgemische in der Heizkammer bei Verwendung von *Fusionsreaktoren* leichter Kerne als Energiequelle zur Aufheizung von Arbeitsgasen sein. Hierbei beabsichtigt man die Produkte kernchemischer Fusionsreaktionen wie Neutronen, α -Teilchen, Protonen, schnelle Elektronen usw. dem Arbeitsgas in der Heizkammer unmittelbar zuzumischen. Da die „Temperaturen“ der Energieträger bei dieser noch sehr „zukünftigen“ Methode in der Größenordnung von 10^{10} °K liegen, könnte das Mischungsverhältnis K der Massen von Energieträger und Arbeitsgas sehr klein sein, wenn man voraussetzt, daß die Elementarteilchen ihre Energie innerhalb des Arbeitsgasvolumens auch wirklich verausgaben. Diese Bedingung könnte unter Umständen zu außerordentlich hohen Beträgen für die minimal zulässigen Heizkammervolumina führen wegen der geringen Wirkungsquerschnitte der meisten Arbeitsgase gegenüber sehr hoch beschleunigten Elementarteilchen, insbesondere gegenüber Neutronen.

Daneben ist mit weiteren technischen Schwierigkeiten dadurch zu rechnen, daß nach SÄNGER [14] die Aufrechterhaltung eines stationären Kernbrandes durch Fusionsreaktionen leichter Kerne nur bei so hohen Brennkammerdrücken und so großen Brennkammerabmessungen möglich ist, daß der eigentliche Kernreaktor nur als bodenfeste Anlage gedacht werden kann.

Dieser oberflächliche Ausflug in die Technologie der Raketen mit ungekoppeltem Antriebssystem, der zur Klärung der Frage nach dem voraussichtlichen Ausmaß der Energiegleichgewichtseinstellung in den Strömungsgasen dieser Triebwerke dienen sollte, ließ erkennen, daß bei einer Reihe von Aufheizmethoden tatsächlich praktisch mit Gleichgewichtsverhältnissen in Kessel und Düse gerechnet werden kann, daß bei anderen Aufheizmethoden auftretende Abweichungen vom Gleichgewichtszustand in der Brennkammer sich jedoch nicht nur in einer *Unterbesetzung* gewisser Freiheitsgrade gegenüber dem endgültigen Gleichgewichtszustand ausdrücken, wie sie allein in den schematisierten Beispielfällen der Abb. 10 und 11 berücksichtigt wurden, sondern in einer anfänglichen *Überbesetzung*, insbesondere von Elektronenanregung und Ionisation, von denen die Elektronenanregung bekanntlich ziemlich rasch auf ihr endgültiges Niveau abklingt, während die Rekombination der primären Ionisationen merkbaren Verzögerungen unterliegen kann. Es soll deshalb zum Schluß dieser Betrachtung noch der Einfluß dieser primären Vor-Gleichgewichts-Ionisation auf die erreichbaren Werte für die Ausströmgeschwindigkeiten abgeschätzt werden, unter der extremen Annahme, daß diese Ionisation sich zumindest in der Heizkammer überhaupt nicht zurückbilde. Wenn man schematisch annimmt,

1. daß Ionisierungen an Teilchen der Art (A) immer nur durch Stöße mit Partikeln einer beliebigen Art (i) hervorgerufen werden, deren Relativgeschwindigkeit

$$v_i = \sqrt{v_A^2 + v_i^2 - 2 v_A v_i \cos \varphi} \quad (8)$$

zu ihnen, zusammen mit ihrer „reduzierten“ Masse,

$$m_r = m_A \cdot m_i / (m_A + m_i), \quad (9)$$

eine sogenannte „relative Stoßenergie“, $m_r v_r^2/2$, größer oder gleich der erforderlichen Ionisierungsenergie ε_{ion} ergeben,

2. daß ferner Rückbildungen solcher Ionisationen zunächst vernachlässigbar selten seien,

3. daß stufenweise Ionisierungen zur primären Ionisation nichts beitragen können, sondern sich erst in einem späteren Stadium der Gleichgewichtseinstellung auswirken und

4. daß keine beachtenswerten Strahlungs- oder sonstigen Energieverluste auftreten, dann beträgt in einem Gas mit Gleichgewichtsverteilung innerhalb der Translationsfreiheitsgrade und mit einheitlicher Temperatur T der Bruchteil dZ der zur Ionisation führenden Stöße zur Zahl Z aller stattfindenden Stöße bekanntlich:

$$dZ/Z = \left(\frac{\varepsilon_{\text{ion}}}{kT} + 1 \right) \cdot e^{-\varepsilon_{\text{ion}}/kT}. \quad (10)$$

Diese Beziehung kann bei der Berechnung der primären Ionisierung eines Arbeitsgases nicht ohne weiteres übernommen werden, da Arbeitsgas und Energieträger im Augenblick der Vermischung sehr verschiedene Temperaturen aufweisen. Die Ionisierung setzt hier im Vor-Gleichgewichtszustand des Gesamtsystems ein und wird wahrscheinlich dadurch ausgelöst, daß das „kalte“ Arbeitsgas durch Fremdpartikel mit entweder *homogener* hoher Geschwindigkeit v_E oder mit *ungeordneten*, einer Gleichgewichtstemperatur

$$T_E = \frac{2}{5} \frac{m_E}{k} \cdot h_E \quad (11)$$

entsprechenden Translationsgeschwindigkeiten beschossen wird, wobei jede Fremdpartikel mit einer kinetischen Energie zwischen $i \cdot \varepsilon$ und $(i+1) \cdot \varepsilon$ Ionisierungen bewirken kann.

Im Fall einer solchen *Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung* bei den Energieträgern beträgt das Verhältnis zwischen der Anzahl von Partikeln mit einer kinetischen Energie größer oder gleich ε und der Gesamtzahl der Partikel:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dn_E}{n_E} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{\varepsilon}{kT_E} \right)^{1/2} e^{-\varepsilon/kT_E} + \int_{x=\sqrt{\varepsilon/kT_E}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]. \quad (12)$$

Wenn die Systemgeschwindigkeit v_E oder die T_E entsprechende wahrscheinlichste Molekulargeschwindigkeit

$$c_E = \sqrt{2kT_E/m_E} \quad (13)$$

gegenüber der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit c_A des unbeheizten Arbeitsgases so hoch ist, daß deren Beitrag zur relativen Stoßgeschwindigkeit v_r vernachlässigt werden kann, dann werden — im Fall von Geschossen mit MAXWELLScher Geschwindigkeitsverteilung —

$$n_E^* = n_E \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{i\varepsilon}{kT_E} \right)^{1/2} \cdot e^{-i\varepsilon/kT_E} + \int_{x=\sqrt{i\varepsilon/kT_E}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right] \equiv n_E \cdot f\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) \quad (14)$$

von n_E Schüssen zu je einer Ionisierung der getroffenen Arbeitsgasmoleküle führen, wobei so große Gasdichte, Schichtdicke und Wirkungsquerschnitte des Arbeitsgases vorausgesetzt werden, daß alle n_E Geschosse bei ihrem Durchgang durch

das Arbeitsgas die notwendige Trefferzahl auch erreichen, das heißt ihre kinetische Energie völlig an das Arbeitsgas abgeben. In den Beziehungen (12) und (14) bedeuten:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{ion}} (m_E + m_A) / m_A, \quad (15)$$

und i laufende ganze Zahlen zwischen 1 und ∞ . Die Zahlenwerte für n_E^*/n_E sind in Abb. 12 in Prozenten als Funktion von ε/kT aufgetragen, ebenso als gestrichelte Kurve die Zahlenwerte für

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} dn_E/n_E.$$

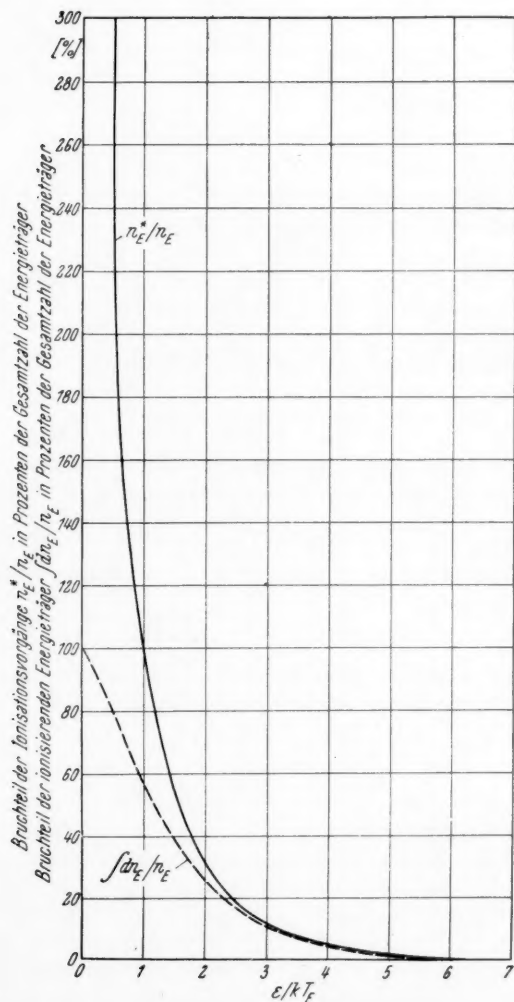


Abb. 12. Prozentsatz der ionisierenden Energieträger und Prozentsatz der im hinreichend dichten und ausgedehnten Arbeitsgas möglichen Ionisierungsvorgänge, in Abhängigkeit von der Funktion ε/kT_E , bei thermischem Gleichgewicht des Energieträgers, entsprechend einer Temperatur T_E und einer kinetischen Mindestenergie ε für die Ionisierung

Wenn also auf n_A Moleküle Arbeitsgas jedesmal n_E Geschoßpartikelchen entfallen, so beträgt die bei der gegenseitigen Durchdringung zunächst verbrauchte Ionisierungsenergie insgesamt:

$$n_E^* \cdot \varepsilon_{\text{ion}} = \frac{n_E \cdot m_A}{m_E + m_A} \cdot \varepsilon \cdot f\left(\frac{\varepsilon}{k T_E}\right). \quad (16)$$

Von der dem Arbeitsgas zugeführten Gesamtenthalpie $n_E \cdot m_E \cdot h_E$ bleibt daher zur eigentlichen Aufheizung von Arbeitsgas und Geschoßpartikeln auf die Heizkammertemperatur T_0 ein Betrag

$$\begin{aligned} h_{0(A)} &= \frac{n_E m_E (5/2) k (T_E - T_0) - \varepsilon_{\text{ion}} \cdot n_E^* / n_E}{n_A m_A m_E} = \\ &= K \cdot \left[h_E - h_{0(E)} - \frac{m_A/m_E}{m_A + m_E} \cdot \varepsilon \cdot f\left(\frac{\varepsilon}{k T_E}\right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

pro Masseneinheit Arbeitsgas übrig.

Im Fall einer homogenen Geschwindigkeit v_E der n_E Geschoßpartikel gibt es drei Möglichkeiten für das Ausmaß der primären Ionisation:

1. wenn $v_E < \sqrt{2 \varepsilon / m_E}$, geht keine primäre Ionisation vor sich;
2. wenn $\sqrt{2 \varepsilon / m_E} \leq v_E < 2 \sqrt{\varepsilon / m_E}$, bewirken alle n_E Partikel je eine Ionisation im Arbeitsgas;
3. wenn $v_E > 2 \sqrt{\varepsilon / m_E}$, können durch jede Geschoßpartikel nacheinander mehrere Arbeitsgasmoleküle ionisiert werden, wie dies auch tatsächlich häufig geschieht.

In allen drei Fällen nimmt die Beziehung (17) die Form

$$h_{0(A)} = K \left[\frac{A v_E^2}{2} - h_{0(E)} - \frac{m_A/m_E}{m_A + m_E} \cdot i \cdot \varepsilon \right] \quad (18)$$

an, worin i die nächste ganze Zahl unterhalb von $v_E^2 m_E / 2 \varepsilon$ bedeutet.

Da natürlich nicht mehr Ionisierungen vorkommen können, als Arbeitsgasmoleküle vorhanden sind, gelten Gl. (17) nur im Bereich $f(\varepsilon / (k T_E)) \leq n_A / n_E$, bzw. Gl. (18) nur im Bereich $i \leq n_A / n_E$.

Bei einer vorgegebenen bestimmten massenspezifischen Energie

$$e_E = h_E + \frac{A v_E^2}{2}$$

des Energieträgers und für eine bestimmte gewünschte Heizkammerenthalpie h_0 des Feuegasgemisches gibt es daher einen maximalen Wert für das Massenmischungsverhältnis K , gemäß der Beziehung

$$K_{\text{max}} = \frac{h_{0(A)} + \varepsilon_{\text{ion}} / m_A}{e_E - h_{0(E)}}, \quad (19)$$

der nicht überschritten werden kann.

Wenn man als Grenzfall einer möglichen Gleichgewichtsabweichung annimmt, daß die primäre Ionisierung weder während der durch die langsameren Stöße gleichzeitig einsetzenden thermischen Aufheizung des Arbeitsgases in der Heizkammer noch bei der Entspannung des aufgeheizten Gases in der Düse zurückginge, so bedeutete dies zwar einen zusätzlichen Aufwand an Aufheizungsenthalpie h_E zwecks Erlangung einer bestimmten gewünschten Heizkammertemperatur T_0 , sowie erhöhte konvektive Wärmeübergänge infolge von Rekombinationen der Ionen an den Feuerraumwänden, jedoch keine Änderung hinsichtlich der bei T_0 gewinnbaren kinetischen Energie in der Düsenmündung, da sich ja nur die Absolutbeträge, nicht aber die Enthalpiedifferenz ($h_0 - h_m$)

ändern würden. Technisch interessant wäre der Fall, wenn es gelänge, die primäre Ionisationsenergie zwar in der Heizkammer möglichst völlig einfrieren zu lassen, die Vorgänge in der Düse jedoch so zu beeinflussen, daß dort weitgehend Rekombination einsetzte, so daß ein mehr oder minder großer Bruchteil der primären Ionisationsenergie in zusätzliche kinetische Energie umwandelbar wäre und derart höhere Mündungsgeschwindigkeiten als im Falle völligen Gleichgewichtes bei gleichen Feuergastemperaturen erreichbar wären.

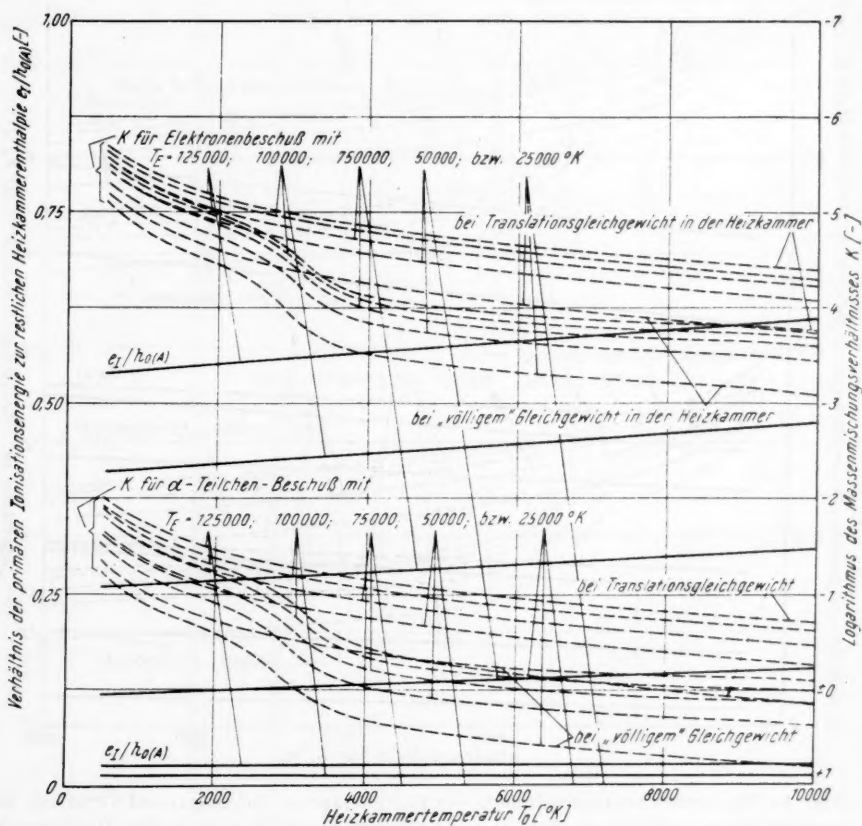


Abb. 13. Massenmischungsverhältnis K von Energieträger zu Arbeitsgas und Verhältnis der aufgewendeten Ionisierungsenergie e_I zur restlichen Enthalpie $h_0(A)$ in der Heizkammer, in Abhängigkeit von der Heizkammertemperatur T_0 nach der Mischung, für Wasserstoff als Arbeitsgas bei Beschuß mit Elektronen oder α -Teilchen mit thermischer Geschwindigkeitsverteilung, entsprechend Temperaturen T_E zwischen 25 000 $^{\circ}$ und 125 000 $^{\circ}$ K

Wenn Arbeitsgas und Energieträger bekannt sind, können also mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen die primäre Ionisationsenergie

$$e_I = [K(h_E - h_{0(E)}) - h_0]/(K + 1)$$

und das Massenmischungsverhältnis $K = n_E m_E / n_A m_A$ in Abhängigkeit von der durch die Translationsenergie definierten Heizkammertemperatur und von der Translationstemperatur oder der Systemgeschwindigkeit des Energieträgers

zahlenmäßig angegeben werden. In Abb. 13 und 14 wurden so für alle möglichen Kombinationen von Wasserstoff oder Wasser als Arbeitsgas und für Elektronen oder α -Teilchen als Energieträger das Massenmischungsverhältnis und die „eingefrorene“ primäre Ionisationsenergie im Verhältnis zur restlichen Heizkammerenthalpie dargestellt. Diese Darstellung erfolgte unter der Annahme, daß die

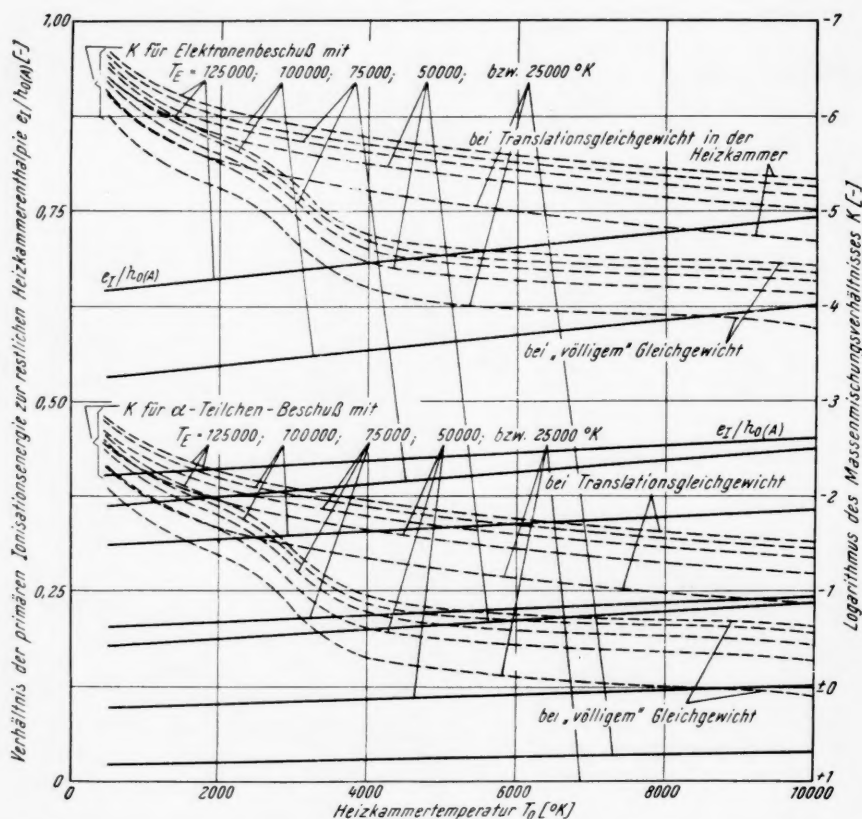


Abb. 14. Massenmischungsverhältnis K von Energieträger zu Arbeitsgas und Verhältnis der aufgewendeten Ionisationsenergie e_i zur restlichen Enthalpie $h_0(A)$ in der Heizkammer, in Abhängigkeit von der Heizkammertemperatur T_0 nach der Mischung, für Wasser als Arbeitsgas bei Beschuss mit Elektronen oder α -Teilchen mit thermischer Geschwindigkeitsverteilung, entsprechend Temperaturen T_E zwischen 25 000° und 125 000° K

Energieträger eine thermische Geschwindigkeitsverteilung entsprechend Temperaturen zwischen 25 000° und 125 000° K aufwiesen und ihre Energie dem Gemisch aus Arbeitsgas und Energieträger völlig erhalten bliebe, bei gleichmäßiger Aufteilung. Was die Gleichgewichtsverhältnisse in der Heizkammer anbelangt, so wurden zwei hypothetische Grenzfälle berücksichtigt, nämlich, daß die gemäß Gl. (16) abgeschätzte primäre Ionisationsenergie in der Heizkammer völlig einfrore und sich die Restenergie des Energieträgers nach Abzug der Primäronisation entweder nur den Translationsfreiheitsgraden des Gemisches (Translationsgleichgewicht) oder allen Freiheitsgraden des Gemisches („völliges“ Gleich-

gewicht) bei jeweils gleichmäßiger, dem Gleichgewichtszustand innerhalb der berücksichtigten Freiheitsgrade entsprechender Verteilung mitteilen würde.

Die Abbildungen lassen erkennen, daß in Temperaturbereichen, in denen das Arbeitsgas im völligen Gleichgewicht überwiegend dissoziiert wäre, die zusätzliche Aufheizung aller inneren und chemischen Freiheitsgrade auf die Translations-temperatur T_0 ein um etwa eine Größenordnung höheres Massenmischungsverhältnis von Energieträger zu Arbeitsgas erforderte. Auf die Höhe der primären Ionisationsenergie wirkt sich jeder Unterschied in der Gleichgewichtsanpassung des Feuergases bei konstanten Heizkammertemperaturen genau proportional den zugehörigen Heizkammerenthalpien aus, gemäß der Beziehung

$$\frac{e_I}{h_{0(A)}} = \frac{(n_E^*/n_E) \cdot \varepsilon_{\text{ion}}}{h_E - h_{0(E)} - (n_E^*/n_E) \cdot \varepsilon_{\text{ion}}} \quad (20)$$

Einen wesentlichen Einfluß auf die Werte der primären Ionisationsenergie und des Massenmischungsverhältnisses übt das Verhältnis m_A/m_E von der Masse des Arbeitsgasmoleküls zu der des Energieträgerpartikelchens aus. In Tab. 6 sind für $T_E = 125\,000^\circ\text{K}$ und $T_0 = 10\,000^\circ\text{K}$ die entsprechenden Zahlenwerte für die in Abb. 13 und 14 behandelten Beispielfälle zusammengestellt.

Tabelle 6

Molekulares Massenverhältnis von Arbeitsgas zu Energieträger	$e_I/h_{0(A)}$	K (für Trans- lations- gleichgewicht)	K (für völliges Gleichgewicht)
$m_{\text{H}_2\text{O}}/m_{e^-} = 3,283 \cdot 10^4$	0,74	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$
$m_{\text{H}_2}/m_{e^-} = 3,674 \cdot 10^3$	0,61	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$
$m_{\text{H}_2\text{O}}/m_\alpha = 4,501 \cdot 10^0$	0,45	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$
$m_{\text{H}_2}/m_\alpha = 5,037 \cdot 10^{-1}$	0,13	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$7,7 \cdot 10^{-1}$

Man sieht ohne weiteres, daß K mit abnehmenden, e_I mit zunehmenden Werten für das molekulare Massenverhältnis erheblich anwachsen.

Bei Kenntnis des molekularen Massenverhältnisses m_A/m_E und des Massenmischungsverhältnisses K läßt sich aus der Beziehung

$$\frac{n_E}{n_A} = K \cdot \frac{m_A}{m_E} \quad (21)$$

die pro Arbeitsgasmolekül erforderliche Teilchenzahl der Energieträger berechnen. Die zahlenmäßige Durchrechnung, deren Resultate sich im Bereich der betrachteten Beispiele zwischen 10^{+1} und 10^{-2} bewegen, ergab, das n_E/n_A in erster Linie vom Verhältnis der Enthalpien h_E/h_0 und verhältnismäßig wenig vom molekularen Massenverhältnis abhängt. Ferner ergab sie, daß die Forderung $n_E^* \leq n_A$, die bei hohen Werten von T_E , T_0 , m_A/m_E und kleinen Werten von ε_{ion} — also beispielsweise bei $T_E = 125\,000^\circ\text{K}$, $T_0 = 10\,000^\circ\text{K}$ und Elektronenbeschuß auf Wasserdampf — kritisch werden kann, im ganzen Bereich der Abbildungen noch erfüllt wird. Im niedrigen Temperaturbereich, also bei Beschuß von α -Teilchen mit Temperaturen bis zu mehr als $75\,000^\circ\text{K}$ aufwärts auf Wasserstoffgas oder mit Temperaturen bis zu mehr als $25\,000^\circ\text{K}$ aufwärts auf Wasserdampf, reichen die eingebrachten Energien überhaupt zu keiner primären Ionisierung mehr aus.

Mit Hilfe der Raketengrundgleichung $P \cdot dt = w \cdot d(M + m)$ kann man die Zahl der in der Zeiteinheit dem Arbeitsgas zuzuführenden Energieträger abschätzen zu:

$$dn_E/dt = \frac{K \cdot P}{(K + 1) g m_E w} \quad (22)$$

und erhält für die berechneten Beispielsfälle Zahlenwerte zwischen 10^{22} und 10^{27} pro Sekunde, wenn man eine Rakete von 10 Tonnen Schub und 10 000 m/s Auspuffgeschwindigkeit, also einem konstanten sekundlichen Massendurchsatz von 1 kg, der Rechnung zugrundelegt. Plasmapistolen, die pro Impuls 10^{15} bis 10^{18} Ionen bei Impulsdauern von etwa 10^{-7} Sekunden auszuschleudern vermögen, kämen selbst unter Annahme alternierenden pausenlosen Einsatzes nur soeben an die untere Grenze dieser Forderung heran. Geringere Energieträgerflüsse würden für die geforderte Rakete nur bei höheren Energieträgertemperaturen und folglich geringeren Werten für K ausreichen. Die bei den Versuchen von GRÜN erzeugten schnellen Elektronenbündel lieferten zwar nur $3 \cdot 10^{15}$ Elektronen pro Sekunde, allerdings mit einer Energie von 50 keV, entsprechend einer einheitlichen Teilchengeschwindigkeit von $v_E = 1,3 \cdot 10^8$ m/s oder einer Teilchentemperatur von $T_E = 2,3 \cdot 10^8$ °K; bei den gleichen Versuchen erzeugte Ionenbündel besaßen Teilchenenergien bis zu 600 keV, entsprechend $v_E = 1,1 \cdot 10^7$ m/s oder $T_E = 2,8 \cdot 10^9$ °K.

Schließlich lassen sich bei Kenntnis der n_E/n_A -Werte die mittleren Molekulargewichte des Feuergases unter Berücksichtigung der zugemischten Energieträgermassen berechnen, deren Unterschied zu den mittleren Molekulargewichten der reinen Arbeitsgase ja, entsprechend den Ausführungen in Abschnitt III, unter Umständen einen Korrekturfaktor für die in Abschnitt II ermittelten Ausströmgeschwindigkeiten notwendig machen könnte. Für das mittlere Molekulargewicht $M_{F(k)}$ des kalten oder des unter Einfrieren der chemischen Gleichgewichte aufgeheizten Feuergases gilt:

$$M_{F(k)} = (n_E/n_A \cdot M_E + M_{A(k)}) / (n_E/n_A + 1) \quad (23)$$

oder

$$M_{F(k)} / M_{A(k)} = (K + 1) / (n_E/n_A + 1); \quad (23 a)$$

also für die in Tab. 6 behandelten Beispiele, bei einer Mischung

von Wasser und Elektronen	$M_{F(k)} / M_{A(k)} = 0,868,$
von Wasserstoff und Elektronen	$= 0,877,$
von Wasser und α -Teilchen	$= 0,913,$
von Wasserstoff und α -Teilchen	$= 1,08.$

Für das mittlere Molekulargewicht M_F des unter Gleichgewichtsverteilung der Restenthalpie auf alle Freiheitsgrade aufgeheizten Gases gilt entsprechend:

$$M_F / M_A = \frac{(K + 1) M_{A(k)} / M_A}{n_E/n_A + M_{A(k)} / M_A}. \quad (24)$$

Diese Beziehung läßt sich in Gl. (5) überführen, wenn man in (5) $h_0/h_E = K/(K + 1)$ substituiert, was nur bei vernachlässigbarer primärer Ionisation zulässig ist. Bei 10 000° K Heizkammertemperatur und 10^{-3} at Heizkammerdruck würde beispielsweise das Verhältnis $M_{A(k)} / M_A$ für Wasserstoff 3,026 und für Wasser 4,678 betragen. Mit diesen Zahlenwerten und mit den entsprechenden K -Werten erhielt man nach Gl. (24) für die bereits vorhin behandelten Mischungen

von Wasser und Elektronen	$M_F / M_A = 0,795,$ bzw.
von Wasserstoff und Elektronen	$= 0,832,$ bzw.
von Wasser und α -Teilchen	$= 1,004,$ bzw.
von Wasserstoff und α -Teilchen	$= 1,566.$

Bei tieferen Temperaturen T_E und entsprechend höheren Teilchenzahlen sehr leichter Energieträger können die Werte für M_F/M_A noch etwas niedriger werden. Innerhalb des auf Abb. 13 und 14 dargestellten Bereiches nehmen sie ihren geringsten Wert bei $T_E = 25\,000^\circ\text{K}$, $T_0 = 10\,000^\circ\text{K}$ und Elektronenbeschuß auf Wasserdampf an, zu $M_F/M_A = 0,459$.

Die hier behandelten hypothetischen Grenzfälle und Zahlenbeispiele können natürlich nur ein ungefähres Bild vermitteln von den Problemen, die bei Berücksichtigung des konkreten Mischungsmechanismus von Arbeitsgas und Energieträger, sowie endlicher Zeiten für die allgemeine Gleichgewichtseinstellung nach der Mischung auftreten, und die unter Umständen zu einer Umbewertung in der Güteskala der verschiedenen Arbeitsgase führen könnten. Da bei den vorliegenden Untersuchungen zunächst noch so große Arbeitsgasvolumina vorausgesetzt wurden, daß die Energieträger ihre gesamte überschüssige Energie innerhalb dieses Volumens abgeben können, so müßten eingehendere Untersuchungen für kleine Heizkammern vor einer endgültigen Wertung auch noch die Einflüsse von Wirkungsquerschnitten und relativem Bremsvermögen der Arbeitsgase, von spezifischem Ionisierungsvermögen der Beschußpartikel usw. beachten — Einflüsse, die alle nicht nur von der Natur von Arbeitsgas und Energieträger, sondern auch von deren Energiezustand abhängen. Endlich wäre eine Untersuchung der Beeinflußbarkeit der Rekombinationsgeschwindigkeit primärer Ionisationen interessant, wie zum Beispiel der Frage, wie weit die Natur des Energieträgers, insbesondere im Fall von Elektronenbeschuß, hierbei eine Rolle spielt.

Literaturverzeichnis

1. W. H. BOSTICK, Experimental study of ionized matter projected across a magnetic field. *Physic. Rev.* **104**, 292 (1954).
2. I. BREDT, Grundsätzliches über spektroskopische Verfahren zur Messung von Temperaturen und Geschwindigkeiten sehr heißer und sehr schnell strömender Feuergase. *Z. Elektrochem.* **56**, 71 (1952).
3. I. BREDT, Wasserstoff bei hohen Temperaturen. *Z. Naturforsch.* **6a**, 103 (1951).
4. A. E. GRÜN, E. SCHOPPER und B. SCHUMACHER, Anwendung intensiver Korpulsularstrahlung zur Anregung von Gasen. *Z. angew. Math. Physik* **6**, 198 (1954).
5. H. J. KAEPELER, Zum Problem der Kühlung von Atomraketen bei Verwendung thermonuklearer Reaktionen. In: *Probleme der Weltraumforschung*. Biel-Bienne: Laubscher & Cie., 1954.
6. H. J. KAEPELER, Beiträge zum Problem der Verwendung von Kernenergie für Strahlantriebe. Im Erscheinen.
7. L. v. MÜFFLING, Wandrekombination freier Atome und Radikale. *Handbuch der Katalyse*, Bd. VI. Wien: Springer, 1943.
8. H. OBERTH, *Wege zur Raumschiffahrt*. München: R. Oldenbourg, 1929.
9. T. PETERS, Plasmastrahlen mit Überschallgeschwindigkeit. *Naturwiss.* **41**, 571 (1954).
10. F. D. ROSSINI und Mitarbeiter, *Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties*. Circular Nat. Bur. Standards 500. Washington, D. C.: United States Government Printing Office, 1952.
11. E. SÄNGER, Neuere Ergebnisse der Raketenflugtechnik. *Der Flug*, Sonderheft 1. Wien, 1934. — NACA, Techn. Mem. 1012, Washington, 1942.
12. E. SÄNGER, Theorie der Gemischaufbereitung in stationären Feuerungen. *Brennstoff-Chem.* **82**, Nr. 1/2, 3/4 (1951).
13. E. SÄNGER, Zur Kinetik des konvektiven Wärmeüberganges und der Strömungsreibung an spiegelnden Oberflächen. *Z. Naturforsch.* **9a**, 410 (1954).
14. E. SÄNGER, Stationäre Kernverbrennung in Raketen. *Astronaut. Acta* **1**, 61 (1955). — NACA, Techn. Mem. 1405, Washington, 1957.

15. E. SÄNGER, Zur Strahlungsphysik der Photonen-Strahlantriebe und Waffenstrahlen. München: R. Oldenbourg, 1957.
16. E. SÄNGER und I. SÄNGER-BREDT, Über einen Raketenantrieb für Fernbomber. Dtsch. Luftfahrt-Forsch. UM 3538, Ainring 1944, S. 47 ff., oder Santa Barbara, California: Edition Robert Cornog, 1952; Stuttgart: E. v. Olnhausen, 1957.
17. E. SÄNGER und I. SÄNGER-BREDT, Internationale Tagung über Staustahlen und Raketen 1956. Mitt. Forsch.-Inst. Physik d. Strahlantriebe e.V., Heft 6. Stuttgart: Verlag Flugtechnik, E. v. Olnhausen, 1956.
18. I. SÄNGER-BREDT, Zur Thermodynamik von Arbeitsgasen für Atomraketen. Vortrag gehalten auf dem IV. IAF-Kongreß 1953 in Zürich. In: Probleme der Weltraumforschung. Biel-Bienne: Laubscher & Cie., 1954; Z. Naturforsch. 8a, 796 (1953).
19. I. SÄNGER-BREDT, Allgemeine Darstellung optimaler Verhältnisse bei lotrecht im Schwerfeld aufsteigenden Raketen von beliebiger Stufenzahl. VDI-Forschungsh. 437, S. 26—39. Düsseldorf: Deutscher Ingenieur-Verlag, 1953.
20. I. SÄNGER-BREDT, Die Rolle der Adiabatenexponenten bei chemisch veränderlichen Gasgemischen. Z. angew. Math. Physik 6, 35 (1955).
21. I. SÄNGER-BREDT, H. J. KAEPELER und G. BAUMANN, Enthalpie-Entropie-Tafeln von Arbeitsgasen. 1. Teil: Wasserstoff-Sauerstoff-Gemische unter Gleichgewichtsverhältnissen, im Temperaturbereich von 0 bis 10 000° K und im Druckbereich zwischen 10^{-5} und 10^{+1} at. Im Erscheinen.
22. L. R. SHEPHERD und A. V. CLEAVER, The Atomic Rocket. J. Brit. Interplan. Soc. 7, 185, 234 (1948); 8, 23, 59 (1949).

Vol
3
195

Vol.
3
1957